

リーマン面とは何か，ヤコビの逆問題とは何か

Shotaro Toki*

2026 年 10 月 25 日

目次

目次	2
本書の構成	5
第Ⅰ部 リーマン面により，$\sin$ の認識を改める	6
第 1 章 関数とは何か	6
1.1 関数の起源	6
1.2 「無限解析序説」を読む	7
1.3 まとめ	8
第 2 章 リーマンによるリーマン面の理論	8
2.1 代数関数のリーマン面	9
2.2 代数関数のリーマン球面	11
2.3 リーマンの位相幾何	12
第 3 章 実関数としての $\sin$	14
3.1 円の弧長	14
3.2 関数 $\Omega(y)$ の多価性	15
3.3 認識を改める	15
3.4 ちょん切る！	16
3.5 積分の周期	17
第 4 章 複素関数としての $\sin$	18
4.1 微分の舞台は..？	18
4.2 線積分と単連結性	19
4.3 周期モジュール	20
4.4 $\sin$ の周期性の再解釈	21
付録：楕円曲線論の素 ^{もと}	22
$\sqrt{1-z^4}$ のリーマン面とリーマン球面	22
楕円積分と楕円関数	25
第Ⅱ部 歴史探求：ヤコビの逆問題とは何か	28
第 5 章 すべての始まり：レムニスケート積分の加法定理	28
ファニャノの発見	28

第 6 章	ファニャノからオイラーへ	31
6.1	E252,E251 を読む	32
6.2	$\sin$ の加法定理とは何だったか	32
6.3	レムニスケート積分の加法定理	34
6.4	オイラーによる一般化	35
第 7 章	ルジャンドルによる楕円積分の分類	35
7.1	還元のステップ	36
7.2	楕円積分の定義	42
第 8 章	アーベルによる新しい楕円積分論の始まり	42
	Abel 1827 「楕円関数研究」を読む：アーベルによる楕円関数の導入	43
第 9 章	Abel 1828 「諸注意」を読む：超楕円積分の加法定理	47
9.1	定理 I の証明	49
9.2	定理 I の振り返り：代数方程式論の視点	53
9.3	定理 I に続く系たち	53
9.4	定理 VIII：超楕円積分の加法定理へ	56
9.5	具体例で噛み砕く	58
第 10 章	ヤコビの逆問題へ	62
10.1	Jacobi 1832：今までを振り返り，今後の方向性を示す	62
10.2	4 重周期関数？	66
10.3	ヤコビの逆問題の定式化	68
第 11 章	楕円関数とテータ関数	68
11.1	テータ関数の収束性に関する補題	70
11.2	テータ関数導入	71
11.3	テータ関数の零点	72
11.4	Θ の零点と極を仕込む	73
11.5	w から ω への移行	75
11.6	結論	76
第 12 章	リーマンによるヤコビの逆問題解決	76
12.1	楕円積分における場合と同様の考察	77
12.2	超楕円積分の組を考える	79
12.3	再設定	80
12.4	テータ関数の導入	81
12.5	テータ関数の零点	83
12.6	2 変数において考える	84
12.7	結論	85

本書の構成

時系列順に歴史を追体験しながら、内容を追っていくのが理想的ではあるが、それにこだわるあまり当の歴史の流れが記述として歪んでしまうことがあり得る。必ずしも、内容が時間の流れに沿って綺麗に積みあがっているわけではないのである。そこで、「代数関数の適切な舞台を考える」「そこ上で $\sin$ とは何か問い直してみる」という2つをモチベーションとし、まずはリーマン面とは何かについて第一部で解説する。これはそれ自体で完結するようになっており、絵を豊富に使った解説となっている。

リーマンによるリーマン面考案は、「複素関数論の基礎確立」と「ヤコビの逆問題解決」という100年以上続いていた2つのテーマの集大成である。そこで第二部では、ヤコビの逆問題とは何であり、それがどのようにリーマンによって解決されたのかについて解説する。そのヤコビの逆問題とは何かを見るために、我々は18世紀前半まで遡ることとなる。ファニャノによるレムニスケート積分の研究をスタートとして、第二部は時系列順に話が進む。ファニャノの仕事を引き継いだオイラーの成果を見的过程中で、 $\sin$ の加法定理とは何かということを論ずる。この「加法定理」が第二部全体を通してのテーマになる。この「加法定理」さえ手放さなければ、読んでいてモチベーションを失うことはない。特に Abel 1828 における「超楕円積分の加法定理」のアーベルによる導出では、現代代数幾何における諸概念が有機的に発生し、意味を成していく様がありありと感じられたため、多く紙面を割いた。

ここで展開する話題において、重要ではあるが触れられなかったテーマとして、

- アーベルのパリの論文の内容である「アーベル積分の加法定理」
- Jacobi 1829「新しい基礎」において展開された内容
- コーシーを主軸とする複素関数論黎明期
- ワイエルシュトラスの数学
- 超楕円積分以外のアーベル積分に関する考察

などがある。これらについては別の機会に触れたいと思う。

第 I 部

リーマン面により， $\sin$ の認識を改める

我々が扱うものは「代数関数のリーマン面」である．そこに向かう前に，"関数"という言葉について擦り合わせをしなければならぬ．

第 1 章 関数とは何か

今の時代，関数とは，定義域のある元に対し，その行先としての終域の元 (実数など"数"が想定される) を明示的に与えることで定まるものである．つまり，まず前提として定義域，終域という概念が必要とされる．その上でそのような元の対応を与えることで関数は得られる．つまり，より端的に言えば，関数とは「終域が"数"の集合であるような写像」のことである．

しかし，それはあくまで今の時代における常識であり，別に世界というのはそれ以前も存在しているわけで，関数というひとつの言葉に向き合うに当たって，別の視点，例えば現在の常識ができる前ではどうだったかということを考えることは重要なことである．そして，それを知る手段はある．それは歴史という学問によって保障されている．

1.1 関数の起源

ひとつ確かなことがある．数学において何か言葉があったとき，それが最初に登場した文献というのが歴史のどこかの時点で必ず存在するということだ．当然，関数という言葉に関してもそれは適応される．関数という言葉を探って，我々はどこまで遡ることになるだろうか．

この世の中で初めて関数という言葉が定着することとなった文献は，1748 年に出版されたオイラーの「無限解析序説」([1]) というものである．この文献で，関数という言葉がどのように説明されるのかを見る前に，まずは当時，この文献がどのような位置づけだったのかということ共有しておこう．その位置づけとは，つまり，当時の世界の情勢，人々の価値観，特に数学観，それまでにどのような数学が築かれてきたか，その上で何をやろうとしていたのか，その文献の新しさとは何か，その文献を人々はどのように受け入れたか，その文献からどのような流れが生まれたか，などといったことを考えることになる．そう言うと，壮大な作業のように思えるが，この「無限解析序説」に至っては，その位置づけの把握を簡単に済ませることができる．例えば，それはオイラー三部作の内の最初の作品である．残りの 2 つは，「微分計算教程」([2]) 「積分計算教程」([3]) と呼ばれるものであり，この 3 つのタイトルから察せられるように，この三部作とは，現代までに通ずる微積分学の基礎付けをした最初の教科書という意味で重要なものである．思い返せば，微分や積分というのは関数に対して行うことである．そういうことで，微分積分について解説されるであろう後の 2 作の前身として，関数に向き合った教科書が「無限解析序説」として一作目に来ているということが自然に思える．

このまま 1748 年当時の背景を描写していきたいところだが，主題から遠ざかってしまうため，簡単に済ま

せると、要は、良く知られているように微積分の創始にはニュートン、ライプニッツが重要であり、彼ら主に17世紀の人物である。その後、ベルヌーイ一族やダランベール、そしてオイラーにその活動は引き継がれ、その後、何百年にも渡って世界共通の常識となるような教科書を始めてオイラーが打ち立てたわけである。その一作目が「無限解析序説」。そして、その1ページ目は、「定量」「変化量」「関数」の定義から始まる。

1.2 「無限解析序説」を読む

実際に、原文を見てみよう。

定義. 定量とは、一貫して同一の値を保持し続けるという性質をもつ明確に定められた量のことをいう。

ここでいう"値"とは、複素数が想定される。定量は、以下で定義される変化量と対比することで理解される。

定義. 変化量とは、一般にあらゆる定値をその中に包摂している不確定量のことをいう。

オイラーはなぜ定量と変化量の定義にこのような言葉遣いをするのか。そのヒントは2作目「微分計算教程」のまえがきにある。そこでは「火薬によって発された大砲からの砲弾の運動」が定量や変化量を説明する例として挙げられる。数直線を引き、弾がどの位置にあるか測るにあたって、その因子として、時間、そして火薬の量や砲弾の向きがあるわけだが、例えば、時間による変化を見たいのであれば、火薬の量や砲弾の向きは常に同じ値であり続けなくてはならない。それがすなわち「火薬の量と砲弾の向きは定量とする」ということであるが、この例を見れば、「同一の値を保持し続ける」という定義の文言も自然に思えてくるだろう。

次に変化量の関数というものが定義される。

定義. ある変化量の関数というのは、その変化量といくつかの数、言い換えると定量を用いて何らかの仕方で組み立てられた解析表示式のことをいう。

「何かしらの仕方」と「解析表示式」という部分が気になるが、これらは次の例と、その後の代数関数と超越関数との分類を通して理解することとなる。

例. 以下は変化量 z の関数である：

$$a + 3z, \quad az - 4z^2, \quad az + b\sqrt{a^2 - z^2}, \quad c^z$$

定義 (代数関数と超越関数). 関数は以下の2つに分けられる：

- 代数関数とは代数的演算のみを用いて組み立てられる関数のことである。
- 超越関数とはその内部に超越的演算が見られる関数のことである。

代数的演算とは、四則演算と冪根を取る操作のことであり、超越的演算は、指数や対数、そして積分計算が例に挙げられることによって説明される。

以上より、関数の定義に現れた「何かしらの仕方」というのは、そのような代数的演算や超越的演算のようなことで、「解析表示式」というのは、それらを組み合わせた最終的な式の形ということだろう。

$\sqrt{\quad}$ について

私たちは、 $x^2 = 2$ の2つの解を、 $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ と表す。つまり、 $\sqrt{2}$ と書いたら、それは平方根の正の方という確定したひとつの値を意味する。しかし、実は当時はそうでなかった。 $\sqrt{\quad}$ は2通りの可能性をもってい

た。つまり、 $\sqrt{2}$ は、今の言葉でいう $\sqrt{2}$ と $-\sqrt{2}$ というどちらの可能性も含んでいた。

ちなみにオイラーは、関数の例として $az + b\sqrt{a^2 - z^2}$ を挙げていたが、これは各 z に対して、2通りの値の可能性を持っていることとなる。つまり、オイラーの関数概念は、現代のものとは違い、一般に多価になり得るのである。

この当時の慣習に乗っかることがリーマンの仕事を理解する上で重要である。そこで以降、この第一部では、記号 $\sqrt{}$ に関しては当時の使い方を採用し、単に $\sqrt{z}$ と書かれた場合は2通りの可能性をもつこととする。そして、確定された2つの値は、 $+\sqrt{z}, -\sqrt{z}$ と必ず符号をつけることで表すこととする。より正確には、複素数 z を $z = R \cdot e^{i\theta}$ ($R \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) と極座標表示したとき、 $\sqrt{z}$ の2通りの値は、 $r \cdot e^{i\frac{\theta}{2}}$ と $r \cdot e^{i(\frac{\theta}{2} + \pi)}$ と表示できるわけだが、前者を $+\sqrt{z}$ とし、後者を $-\sqrt{z}$ とする。これらは演算における $+, -$ の通常の意味と整合的である。

それもあり？

代数関数と超越関数の定義の後にオイラーは次のような言及をする：

代数関数はしばしば具体的な形に表示されないことがある。例えば、

$$Z^5 = az^2Z^3 - bz^4Z^2 + cz^3Z - 1$$

という方程式を通じて規定される z の関数 Z のように、たとえこの方程式は解けないとしても、 Z は変化量 z と定量を用いて組み立てられる何かある表示式と等置されること、したがって Z は z の何らかの関数であることははっきりとわかっている。

方程式を通して、 z に対し、 Z の値が (5通り) 決まることは想定できるわけだが、その上で、オイラーはこれが z の代数関数を定めるといっている。そして、オイラーはその根拠に、この5次方程式の代数的可解性をあげている。その後の文脈からも察するに、オイラーは代数方程式の代数的可解性を信じていたようである。しかし、19世紀に入ってから、アーベルによって一般には可解とは限らないことが証明された。したがって、今となっては、方程式によって定まる関数は、オイラーの意味では代数関数ということにならないが、その後、このように代数方程式によって定まる関数自体を代数関数と呼ぶこととなった。定義が拡張されたわけだ。我々はその呼称を採用する。

1.3 まとめ

現代の関数概念と、原点であるオイラーの関数概念の違いを感じていただけたらだろうか。オイラーの関数概念は、現代で強調される「元の対応」というよりはむしろ「表示式」によって成り立っている。だから、その表示式によっては多価性をもつ。

第2章 リーマンによるリーマン面の理論

リーマン面とはリーマンの1851年の学位論文 ([4]) と1857年の論文 ([5]) で、「複素関数論の基礎確立」と「ヤコビの逆問題解決」を象徴するものとして登場した概念である。それならば、その概念に向き合うためには複素関数論黎明期のクロニクル、並びにヤコビの逆問題とは何かを掴むために、さらに過去に遡る必要がある。

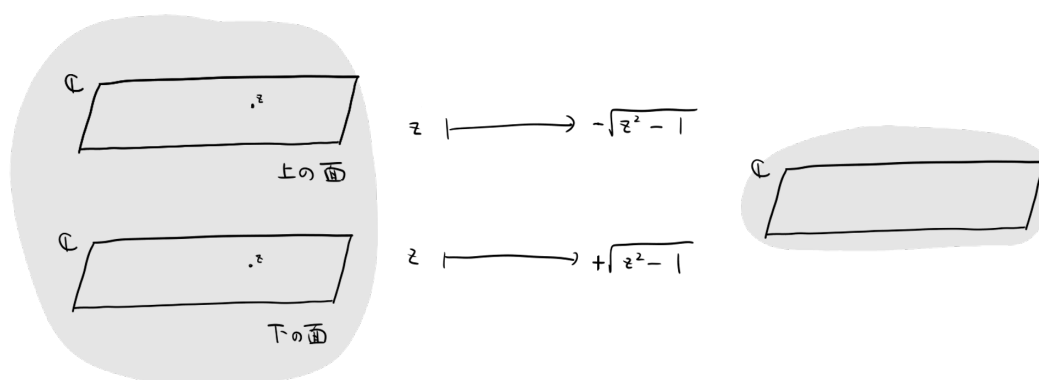
る。しかし、それは第二部で見ていくこととして、ここでは別の道を進む。その道とは、リーマン面に関する一番最初の教科書的な文献を読むことである。「一次的な教科書」と呼ぶのがよいだろうか。それは2次以降のものとは違い、リーマンの原論文のみに忠実に向き合っている。一次的な教科書として、カール・ノイマンが1865年に書いたもの([6])がある。当時、多くの人はこれでリーマンを理解したらしい。ただこれは英訳されていない埋もれてしまった文献である。以下の内容は、この教科書を読んだ私の作るものである。

2.1 代数関数のリーマン面

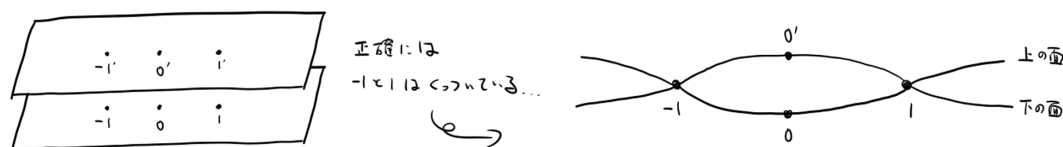
まず理念を共有する。

目標. 代数関数とは大抵、多価関数である。そんな代数関数を一価関数として認識できる適切な舞台を見つきたい。

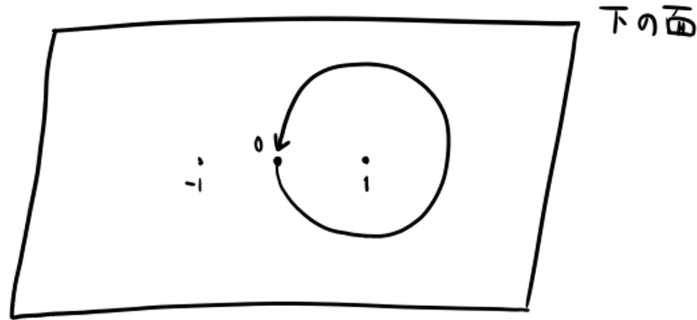
以降、 $\sqrt{1-z^2}$ という z の代数関数を例として考えていく。これは2価関数である。 $z = \pm 1$ のときを除いて、 z に対し、その値は2通りある。よってその対応を一価関数として表現するための最初のステップとして、複素平面を2枚用意し、以下のように考えてみる：



定義域のこの2枚のシートをそれぞれ上の面、下の面と呼び、上の面の z は $-\sqrt{1-z^2}$ に飛ばし、下の面の z は $+\sqrt{1-z^2}$ に飛ばしている。ここで、区別するために下の面の点は普通に z と書き、対応する上の面の点を z' と書くことにしよう。例えば、この定義域には 0 と $0'$ という2通りの 0 があることになる。ちなみに $z = \pm 1$ だけは一価である。そのとき関数の値は決まって 0 だ。だから、 1 と -1 に関してはそもそも2つに分かつ必要がない。よってこの2点に関してのみ $1 = 1'$, $-1 = -1'$ とすることにしよう。よって、今の時点でこの2枚のシートは横から見れば次のようになっていることになる：

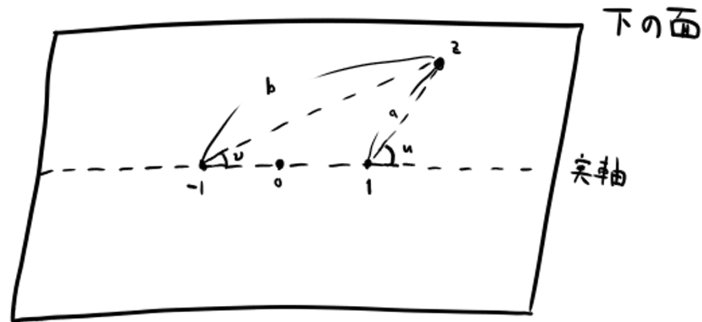


ここで次のように下の面の点を 0 から動かすことを考えてみる：



このとき関数の値がどのように変化していくかを観察してみよう。そうすると一見、奇妙なことが起きる。

その観察をするために、まずは z の表し方を次のように変える。まず $z - 1 = ae^{iu}$, $z + 1 = be^{iv}$ とおく。このとき a, b, u, v の意味は以下ようになる：



このとき

$$\sqrt{1-z^2} = \varepsilon \cdot i\alpha\beta \cdot e^{i\frac{u+v}{2}} \quad (\alpha := +\sqrt{a}, \beta := +\sqrt{b})$$

と表せる。ただし、 ε は $+1$ か -1 である。

この表記の下で、下の面の点 0 の行先がどうなるかを考えてみる。まず $z = 0$ とは、 $a, b = 1$, $u = \pi$, $v = 0$ を意味する。このとき、 u, v に関しては他にも選択肢があることに注意する。これらを代入すると、 $\sqrt{1-z^2}$ は

$$\varepsilon \cdot i \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = \varepsilon \cdot (-1)$$

となる。ところで、下の面の行先は $+$ の方だと決めていた。よって、 $z = 0$ の行先は 1 でなくてはならず、 ε は -1 であることがわかる。

そんな $z = 0$ から、 1 の周りを一周して、 0 自身に戻ってくることを考えるわけだ。つまり、 1 を中心とした角度である u を π から 3π まで増加させていくこととなる。このとき、 a, b, v も多少変化はするが、最終的には元の値に戻る。また、スタートの時点で -1 だった ε が突然 $+1$ に切り替わることはあり得ない。なぜなら、下の面における $+\sqrt{1-z^2}$ という関数の値が、じりじりと動いていく中で、符号が変化するほどに、急に値が飛躍することなどありえないからだ。ここで、ゴール地点でどうなるか見てみよう。それはつまり、 $a, b = 1, u = 3\pi, v = 0$ のとき。値は、

$$-i\alpha\beta e^{i\frac{u+v}{2}} = -ie^{i\frac{3\pi}{2}} = -1$$

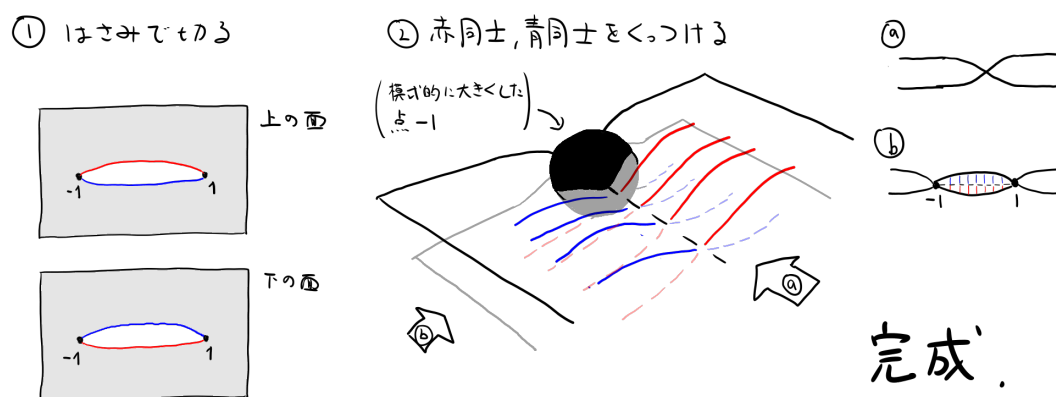
となる... これはおかしい。まず我々の想定として、 z は下の面の 0 からスタートして同じ 0 に戻ったはずである。しかし、その 0 の取る値というのは、 $+1$ であるはずだった。 -1 の値を取るのは、上の面の $0'$ であるは

ずだ。結果、下の面の 0 からスタートして 1 を一周回って戻ってくると、そこはなんと上の面の $0'$ だったという観察ができてしまったことになる。つまり、 $-1, 1$ でのみくっついている単なる 2 枚のシートという我々のイメージでは不十分だったということだ。

同様の観察を他のパターンでも考えてみると、

- $0'$ から上の面で 1 を一周して戻ると、そこは 0
- 0 から下の面で -1 を一周しても戻ると、そこは $0'$
- $0'$ から上の面で -1 を一周して戻ると、そこは 0
- 1 か -1 を回らない限り、そのようなことは起きない

ということが観察できる。以上で観察したことと辻褃の合うように、以下のような工作をしよう：

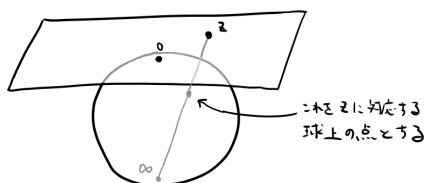


これが代数関数 $\sqrt{1-z^2}$ のリーマン面である。

2.2 代数関数のリーマン球面

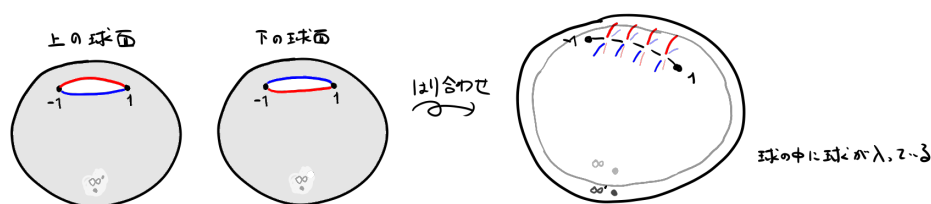
まず最初に注意しておきたい。現代数学でリーマン球面といったら、それはひとつの特定のものである $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を指す。しかし、今から使うリーマン球面という言葉はそれとは異なる 19 世紀における使い方である。そこでは、「今まで見てきた代数関数のリーマン面の進化系である代数関数のリーマン球面」といった感じである。今回は代数関数 $\sqrt{1-z^2}$ のリーマン球面とは何かを説明する。

やることは至って簡単である。1 枚のシートから球面への以下のような点の対応のさせ方がある。そうすると、ひとつの点だけシートと対応する点をもたない。これを ∞ の書き、無限遠点と呼び、そのようなものが付け加わった球面を、シートの代わりに考えていこうというのが、面から球面への転換である。



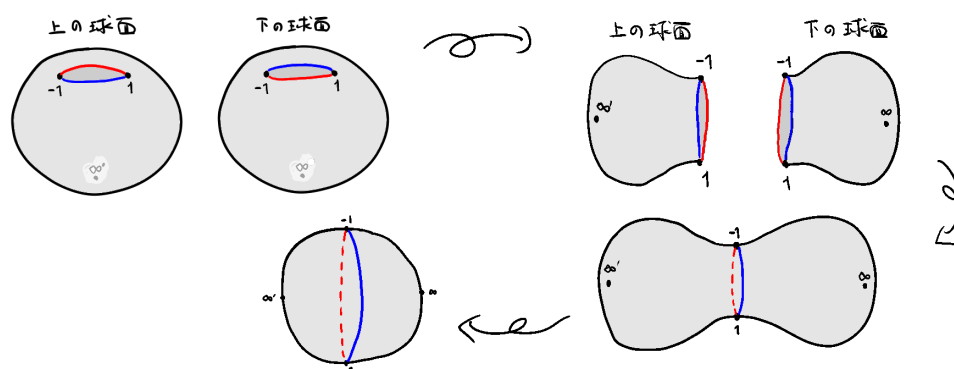
したがって、 $\sqrt{1-z^2}$ のリーマン球面とは、2 枚のシートの代わりに、2 枚の球面をシートのときと同じよう

に張り合わせたものとなる。



これが $\sqrt{1-z^2}$ のリーマン球面である。もともと、 $\sqrt{1-z^2}$ のリーマン面は $\sqrt{1-z^2}$ が一価関数となるような適切な定義域であったわけで、引き続き $\sqrt{1-z^2}$ をそのリーマン球面上の関数だと思いうために、唯一の追加された点、 ∞ のとる値を考えなくてはならないが、当然 $\sqrt{1-\infty^2}$ は有限な値であることが想定できない^{*1} ため、例外的なケースとして「 ∞ は極である」と言うことにする。

ところで、 $\sqrt{1-z^2}$ のリーマン球面の絵を上で描いたわけだが、そこにおいて表現されていなくてはならない情報というのは、「2つの球面があのように張り合わさる」ということだけである。だから、次のようにも描写することができる：



こう見ると、これはもはや単なるひとつの球面である。こうなるということを $\sqrt{1-z^2}$ という代数関数のひとつの性質と思うことは我々をさらなる探求へと導いていくこととなる。つまり、他の代数関数においてどのような形が現れるのか... それについては付録を読んでほしい。

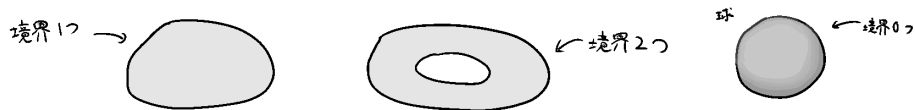
2.3 リーマンの位相幾何

リーマンは「面」^{*2}という概念に対して以下のような理論を展開している。面の定義自体はしない。上で考えた代数関数のリーマン面や、下で考えるより単純なものが、例になっていることさえ共有されていれば問題ない。また、代数関数のリーマン球面も面の例になっている。

まず面には境界という概念がある。以下の例において、それが何か察することができると思う。

^{*1} 球に対して反対から同じ座標の取り方をすることで、 ∞ の行先も正確に考えることができる。

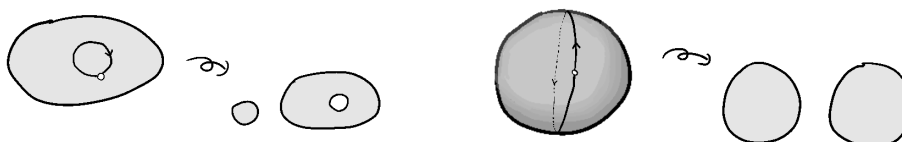
^{*2} 今まで「リーマン面」という言葉を使ってきたが、リーマンは単に「面」と呼んでいた(自分で自分の名前を付けることはしないだろう)。しかし、その中には、現代の意味でリーマン面ではない例も多数含まれる。そこで、今までの「代数関数のリーマン面」については「リーマン面」という言葉を使ってきたが、それを例に含む一般の「面」に関しては、リーマンによる呼び名そのままに「面」と呼ぶことにする。



そして、面には切断線という概念がある。それは境界上の2点を結ぶ線であり、その線に沿ってハサミで切ることが想定される。だからその曲線が自己交差してはいけない。



またひとつ点をくりぬいてから、そこからそこへの切断線を取ることも可能としている：



そして、切断線で切ることによって、何個の部分に分かれるかということにリーマンは注目する。単なる円盤はどのように切断線をとろうとも、必ず2つに分かれてしまう。この現象に注目し、リーマンは以下の言葉を定義した。

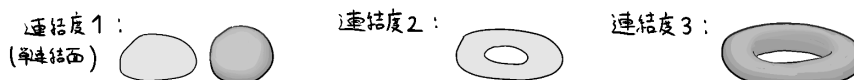
定義. どんな切断線で切っても、2つの部分に分かれるような面を単連結面という。

単連結面の例：



さらに「何回切ったら単連結面に至るか」という観点から、面に対してとある量を見いだすこととなる。

定義. $n-1$ 本の切断線で切ることによって、単連結面になるような面を n 重連結面といい、 n をその面の連結度という。



種数について

現代では「リーマン面の種数」という概念がある。それは今の話においてどのように現れているか。まず境界を持たない面は閉曲面と呼ばれる。代数関数のリーマン球面は閉曲面の例である。そして、実は閉曲面の連結度は必ず奇数であり、 $2p+1$ と書ける。このときの p を種数と呼んでいるのである。よって、代数関数 $\sqrt{1-z^2}$ のリーマン球面は、単なるひとつの球面とみなせていたため、連結度は1であり、種数は0というこ

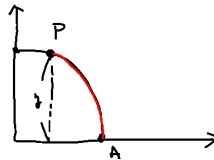
とになる。

第3章 実関数としての $\sin$

まずは初等的な話から始めていく。

3.1 円の弧長

xy 平面上の単位円は、方程式 $x^2 + y^2 = 1$ で表される。 $P = (x, y)$ を第一象限内の円上の点とする。このとき、点 $A = (1, 0)$ から $P = (x, y)$ までの弧の長さを計算してみる。



それは,

$$\int_A^P \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

を計算することとなるが、 $x^2 + y^2 = 1$ の両辺を (18 世紀における意味での) 微分をすると,

$$d(x^2 + y^2) = d(1)$$

$$d(x^2) + d(y^2) = 0$$

$$2x dx + 2y dy = 0$$

$$dx = -\frac{y}{x} dy$$

と計算することができる。このような微分計算は、現在の「無限小」という概念の扱いを諦めた数学教育の上では異質かもしれないが、伝統的で整合性もあり、なおかつ実践的なものである。オイラー三部作の2作目「微分計算教程」においてそれは体系化された。(オイラーの) 関数に対してその操作は行われ、それは現代の微分概念に通ずる以下のルールによって運用される：

- $da = 0$ (a : 定数)
- $d(x + y) = dx + dy$
- $d(xy) = x dy + y dx$

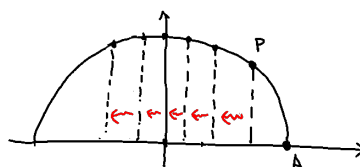
先程の計算はそれらのルールに基づく。そこから,

$$\begin{aligned} +\sqrt{dx^2 + dy^2} &= +\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} dy \\ &= +\sqrt{1 + \frac{y^2}{1 - y^2}} dy \\ &= \frac{dy}{+\sqrt{1 - y^2}} \end{aligned}$$

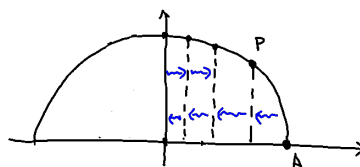
と計算できる．よって，これを y が 0 のときから y のときまで足しあげるわけなので，弧の長さは， $\theta = \int_0^y \frac{dy}{+\sqrt{1-y^2}}$ ということになる．これは高校で習う微積分の方法でも計算できる (媒介変数表示を使う方法)．

3.2 関数 $\Omega(y)$ の多価性

実数 y に対して，それが正弦となるような弧の長さを $\theta = \Omega(y)$ とおく． $\sin$ とは，この y の関数 Ω の逆関数のことである．このように記号を定めた上で，前の節で何がわかったのかといえば，それは $0 \leq y \leq 1$ においては $\Omega(y) = \int_0^y \frac{dy}{+\sqrt{1-y^2}}$ と計算できるということである．そのとき， $\theta = \Omega(y)$ は，0 から $\frac{\pi}{2}$ までの範囲を動く．一方で我々が高校で習う $\sin$ の定義域はそれよりも広い．よってこれから動かす範囲を $\frac{\pi}{2}$ よりも先へ行かせることを考える．絵で見ればその動きは簡単である：



つまり，今までは $\theta = 0$ から $\theta = \frac{\pi}{2}$ まで，すなわち $y = 0$ から $y = 1$ まで動いていたところをさらに奥へと動かしている．とりあえず $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ まで動かすこととしよう．このとき， y の動きにだけ注目すれば， $y = 0$ から値は大きくなっていき， $y = 1$ に達し，そこから今度は $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ に向かって小さくなっていくことを意味する．しかし，この y の動きにだけ注目した場合，もう一通りの絵の動きがあり得る．それは次のように， $y = 1$ まで行った後，右側に戻っていく動きである．



このときも， y は 1 に到達した後， $\frac{\sqrt{3}}{2}$ まで小さくなっていく．先ほどと全く同じ動きである．すなわち， $\Omega\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ の 2 通りの値がここで現れた．そしてそれらは次のように計算される：

$$\begin{aligned} \text{前者} &= \int_0^1 \frac{dy}{+\sqrt{1-y^2}} + \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dy}{-\sqrt{1-y^2}} \\ \text{後者} &= \int_0^1 \frac{dy}{+\sqrt{1-y^2}} + \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dy}{+\sqrt{1-y^2}} \end{aligned}$$

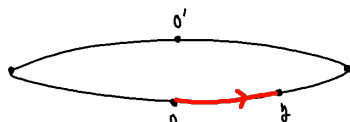
つまり，微分の方母の $+\sqrt{1-y^2}$ が，前者と違い後者においては， $y = 1$ で $+$ から $-$ に切り替わっているのである．

3.3 認識を改める

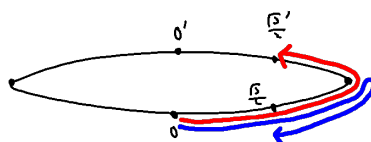
y の動きとともに $\sqrt{1-y^2}$ に付いている符号の変化も引数に含めることで，上で見られた現象をよく理解することができる．「単に y が -1 から 1 までを動く」というイメージを次のように変える：



そうすると、話のスタートであった、 $0 \leq y \leq 1$ のときの $\Omega(y) = \int_0^y \frac{dy}{+\sqrt{1-y^2}}$ とは、

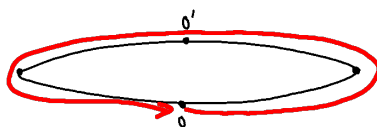


という道に沿った積分だったということになる。そして、その後 $y = 1$ から $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ へと進んだ際に得られた 2 通りの値は、それぞれ



という 2 つの道に沿った積分だったということになる。

このような視点に立つと、 $\Omega(0)$ も別に 0 とは限らないということに気づく。例えば、

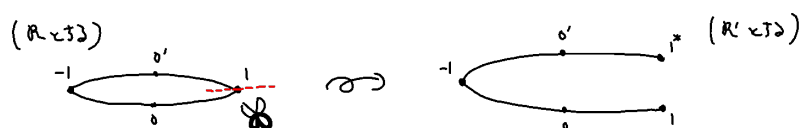


という道に沿って積分すれば、 $\Omega(0) = 2\pi$ が得られる。このように、道の取り方によって、 $\Omega(y)$ は様々な値を取りうる。

以上より、最初から $\Omega(y) = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$ ($\sqrt{\quad}$ の符号がなくなったことに注意!) とし、「この積分は y の道の取り方による」と認識した方が話は整理される。そして、上と下、どちらの道に在るかによって、 $\sqrt{1-y^2}$ の符号は変わるわけだ。

3.4 ちょん切る!

円状の定義域だと $\Omega(y)$ の値は道の取り方によってしまう。そこで、次のようにハサミで切ってみる:



そしてこの $\mathfrak{R}'$ 上での積分 $\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$ を $W(y)$ とおく．すると，これは実は道の取り方によらない．というのも， $\mathfrak{R}'$ で同じ点から同じ点に戻るためには，必ず来た道に戻るしかない．同じところを行ったり来たりする分には積分は打ち消されるだけなので，結局，最終的にどこに向かったかでその値は決まる．したがって， $W(y)$ は一価関数である．

このとき， $\mathfrak{R}'$ が，面のときと同じ意味で，"単連結線"であることに注意したい．すなわち，どこで切っても必ず2つの部分に分かれる．

3.5 積分の周期

最後に $\Omega(y)$ の見通しの良い計算法を与える．まず



という道に沿った $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$ の積分を，その微分の周期モジュールという．実際それは，

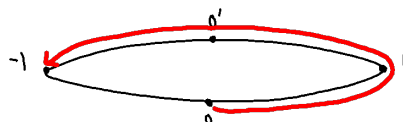
$$W(1) - W(1^*) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 2\pi$$

と計算される．実は，この量を使って，

$$\Omega(y) = W(y) + 2\pi \cdot (1 \text{ をまたいだ回数})$$

と計算することができる．ただし，下から上にまたいだら +1 回，上から下にまたいだら -1 回と数える．

この結果の根拠は，例から容易に観察できる．実際，



という道に沿った積分 $\Omega(-1)$ は，

$$\left(\begin{array}{c} \text{Diagram of a path starting at -1, going up and right to 1, then down and right to -1, forming a loop.} \\ \text{という道に沿った積分} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Diagram of a path starting at -1, going up and right to 1, then down and right to -1, forming a loop.} \\ \text{という道に沿った積分} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Diagram of a path starting at -1, going up and right to 1, then down and right to -1, forming a loop.} \\ \text{という道に沿った積分} \\ \parallel \\ W(-1) \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Diagram of a path starting at -1, going up and right to 1, then down and right to -1, forming a loop.} \\ \text{という道に沿った積分} \\ \parallel \\ 2\pi \end{array} \right)$$

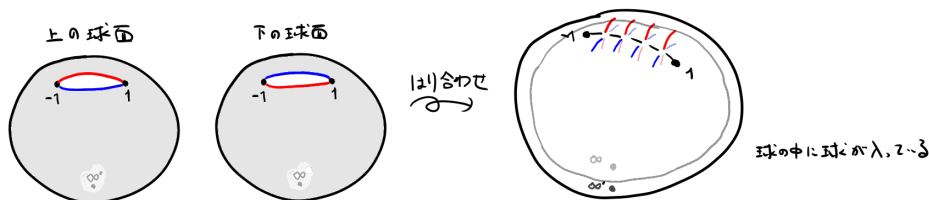
と計算できる．

第4章 複素関数としての $\sin$

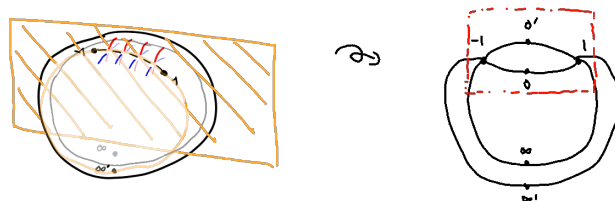
前章の主役 $\Omega(y) = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$ において重要なのは、 $\sqrt{1-y^2}$ の 2 価性だった。ところで、第2章で我々は既に、それを複素変数の代数関数 $\sqrt{1-z^2}$ として考察していた。

4.1 微分の舞台は..?

$\sqrt{1-z^2}$ の舞台となるリーマン球面については以前観察した。



これを $\mathfrak{R}$ としよう。すると、 $\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ の積分は明らかにこの上で考えられるべきである。実際、実軸で切ってみると、前章の $\mathfrak{R}$ が現れる：



すなわち $\sqrt{1-z^2}$ のリーマン球面 $\mathfrak{R}$ 上で取られる道に沿って、 $\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ の積分は行われるべきである。実のときと同様に、上の面にいるときは、微分内の $\sqrt{1-z^2}$ は $-\sqrt{1-z^2}$ となり、下の面にいるときは、 $+\sqrt{1-z^2}$ となる。

しかし、 $\mathfrak{R}$ の至るところでそれを考えてよいと言われれば、少し注意が必要であろう。というのも、 $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ は ± 1 で有限の値を取らないし、やはり ∞, ∞' においてどうなるかも気になるところだ。つまり、「その点を通った道を選んでも、無事積分できるのか」という疑問である。この4点について調べていこう。

- $+1, -1$ においては、前述の通り、 $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ は極となるが、実は微分としては問題ない。その前兆はすでにあり、実上の話において既に積分 $\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$ は $\frac{\pi}{2}$ に収束することを見ている。

実際に $+1$ において、微分 $\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ が極でないことは、 $t = \sqrt{z-1}$ と座標変換することで確認できる^{*3}。

^{*3} なぜこの座標変換によって確認できるのかにはちゃんとした理由がある。それ以前に、なぜ $1, -1, \infty, \infty'$ ではそのままの形 $\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ だと問題があるのか。それは、そもそも微分 dz はただの平面上で扱われなくてはならないからである。 z という座標を取っている限り、その座標の張られた平面に ∞, ∞' は現れない。そして、 $1, -1$ という点が含まれている限り、どんな小さく部分を取ったとしても、それは平面にならない。つまり、ここでやっている変換というのは、 1 を含む部分の単なる平面への変換なのである。

そのとき微分式 $dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{dz}{\sqrt{z-1}}$ が誘導されるので、

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{2}{\sqrt{-t^2-2}} dt$$

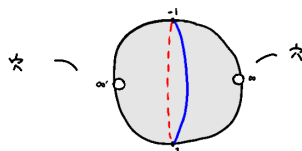
と計算でき、変換後、 $t=0$ において有限の値を取るため、問題の微分は $z=1$ で極でない。 $z=-1$ のときも同様に問題ないことが確認される。

- ∞, ∞' のときについては、 $z = \frac{1}{t}$ と変換し、 $t=0$ のときを見ればよい。そのとき、 $dz = -\frac{1}{t^2} dt$ より、

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -\frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$$

となるため、 $t=0$ のとき有限でない。

以上より、微分 $\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ は ∞, ∞' のみ極である。よって、この微分の舞台としては、 $\sqrt{1-z^2}$ のリーマン球面から 2 点 ∞ と ∞' を除いたものとなる。



4.2 線積分と単連結性

実のとき、微分 $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$ を扱う舞台であった $\Re$ をちょん切ることによって得られた $\Re'$ 上ではその積分が道に依らなかつた。

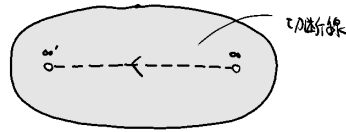


このとき $\Re'$ は面のときと同じ意味で"単連結線"であった。つまり、もう一度どこかでちょん切ると、必ず 2 つの部分に分かれる。実は、この「線積分が道に依るか」と単連結性の繋がりが面においても成り立つ。それを保障するのがコーシーの積分定理である：

定理. ある面の部分上で定義される微分について、その部分が単連結のとき、その線積分は道の取り方に依らない。

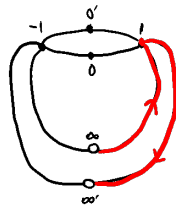
このコーシーの積分定理は、グリーンの定理によって従う。

よって、実のときのような線積分の計算法を確立するためには、今、微分の舞台となっている「 $\sqrt{1-z^2}$ のリーマン球面から ∞ と ∞' を抜いた部分」(以下それを $\Re$ とする) をうまくハサミで切って単連結にする必要がある。実際、



と ∞ の穴から ∞' の穴に向かってハサミを入れることで、単なる平面にすることができる。このように、一回切断線で切ることによって単連結面にできるということは、考えている面 $\mathfrak{R}$ は 2 重連結面ということになる。今得られた単連結面を $\mathfrak{R}'$ とする。

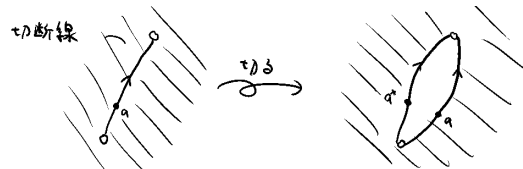
注意として、切り込みを実軸のところで切断した断面上で見ると、



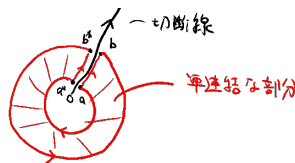
ということになり、実のときに考えていた $\mathfrak{R}$ と $\mathfrak{R}'$ が部分に現れていることがわかる。

4.3 周期モジュール

切断後、切断線上の点 a は 2 つに分かれる。切断線の向きに沿って左側を a^* とし、右側を a とする。



切断線上の点の例として、1 があるわけだが、実のときに確認したように、 $\mathfrak{R}'$ 上での 1 から 1^* への線積分は 2π である。それは切断線上の点である 1 の 2 つに分かれた一方から一方への向かう線分に沿った積分の値である。これは実は任意の切断線上の点に対しても同じ値 2π をとる。実際、切断線上の点 a, b をとると、コーシーの積分定理から、



に沿った積分は 0 であり、元々同一の線分であるため「 a から b への線分」と「 a^* から b^* への線分」に沿った積分は同じである。よって、 a についてのものと b についてのものは等しい。以上より、切断線上の点の分裂した一方から一方への $\mathfrak{R}'$ 上での積分は、点の取り方に依らずに 2π である。そういうわけで、この量は微分とその切断線に対して決まる重要な量である。それをこの微分の周期モジュールという。さらにコーシーの積分定理から、この値が切断線の取り方にも依らないことがわかる。

この量を使えば、実のときと同じように、 $\mathfrak{R}$ 上での線積分を $\Omega(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ とし、 $\mathfrak{R}'$ 上での線積分を

$W(z)$ とすると,

$$\Omega(z) = W(z) + 2\pi \cdot (\text{切断線をまたいだ回数})$$

と計算できる. ただし, 切断線の向きに沿って左から右にまたいだとき $+1$ 回, 右から左にまたいだとき -1 回と数える.

4.4 $\sin$ の周期性の再解釈

$\Re$ の形状を考えれば, $\Re$ 上の点 z に対し, 0 から好きな回数切断線をまたいでから z に到達することができる.

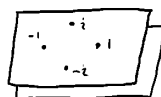
したがって, $\Omega(z)$ は無限多価関数であり, 各 z に対し, $\Omega(z) = W(z) + 2\pi n$ とかける. これは, $\theta = \Omega(z)$ の逆関数である $z = \sin \theta$ の周期性 $\sin \theta = \sin(\theta + 2\pi)$ を導く.

付録：楕円曲線論の^{もと}素

$\sqrt{1-z^4}$ という代数関数について同じことを考えていこう。

$\sqrt{1-z^4}$ のリーマン面とリーマン球面

$\sqrt{1-z^2}$ のときと同じように、代数関数 $\sqrt{1-z^4}$ の適切な定義域を考えていく。これも 2 価関数であるので、とりあえず 2 枚のシートをとることは変わらない。ただ、 $1-z^4$ は $1, -1, i, -i$ を根としてもつため、それら 4 点では潰れているものとする。 $\sqrt{1-z^2}$ のときの $1, -1$ に当たるものである。これらは分岐点と呼ばれる。



今回も、分岐点の周りを一周するにあたって、関数の値がどう動くかを観察することで、2 枚のシートの張り合わせ方が決まる。そこで、

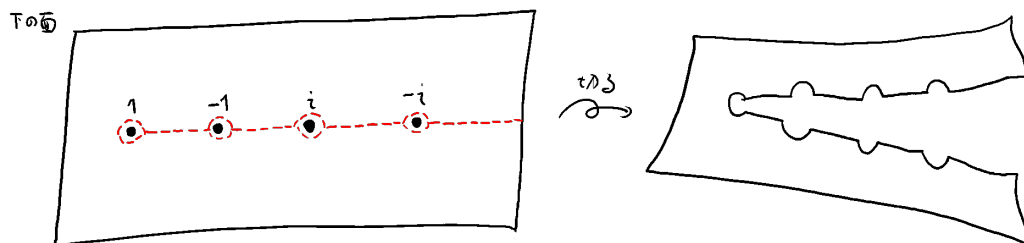
$$z-1 = ae^{iu} \quad z+1 = be^{iv} \quad z-i = ce^{iw} \quad z+i = de^{it}$$

とおくと、

$$\sqrt{1-z^4} = \varepsilon \cdot i\alpha\beta\gamma\delta \cdot e^{i\frac{u+v+w+t}{2}}$$

となる。ただし、 $\varepsilon = +1$ or -1 で、 $\alpha = +\sqrt{a}, \beta = +\sqrt{b}, \gamma = +\sqrt{c}, \delta = +\sqrt{d}$ とおいている。そうすると、 $\sqrt{1-z^2}$ のときのように、下の面において、0 から $+1$ だけを一周回って 0 に戻った場合は、 u のみが $+2\pi$ だけ変化する。そのとき、関数の値は $+1$ だったのが、 -1 に変化するため、上の面の 0、すなわち $0'$ に到達していることがわかる。そして他の分岐点についても同様の観察がなされ、またどの分岐点も回らないときは、元の場所に戻ったとき、どの変数も最初の値に戻ることになるので、下の面だけで話は完結する。

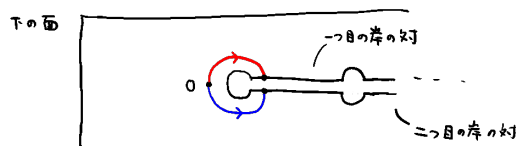
以上の観察から、上の面と下の面がどのように貼り合わさっているかを考えなくてはならない。その方法として、まず以下のように下の面を切断してみる。



切断が一直線になるように本来の座標における点の位置から歪ませているが、それはこれからする話に支障のないことである（本来の座標の位置のままで切断をくねくねさせて書いてもよい）。このように分岐点をすべ

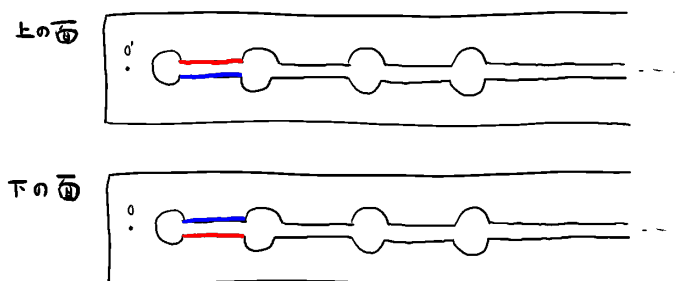
て含む部分を切り落とした場合、残った面上で z を如何に動かそうとも、分岐点を一周することは不可能なので、上の面との繋がりは現れない。すなわち、上の面も同様に切り落とした場合、下の面と上の面は独立したままで問題ない。しかし、切断したことで現れる合計 8 つの岸を越えることを想定したとき、それは同一の面の向かいの岸に着地するとは限らないことが観察される。

それを見るために、まずスタート地点として、下の面の 0 を考える。0 での関数の値は確定していて、それは 1 である。そこから、下図のように 0 を 2 通りの方法で動かす。

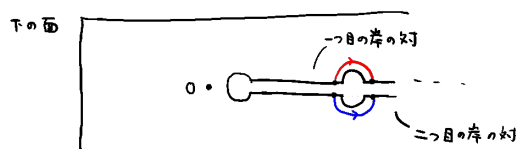


このとき、上回りの場合と下回りの場合で、各変数はどのように変化するか。当然、スタート地点は一緒なので、各変数が最初にとっていた値は同じだったと思ってよい。そしてそこから、上と下でそれぞれ回り、一つ目の岸の対の対応する点にそれぞれ達する。そのとき、変数 a, b, c, d, v, w, t は同じ値で終わることが観察できる。一方で、 u に関しては、スタートを共通で π だとした場合、上回りの場合は、0 に達し、下回りの場合は 2π に達することがわかる。それらを元に、関数の値の変化を見ると、上回りで達した上側の岸上の点における関数の値と、下回りで達した下側の岸上の点における関数の値は、 $\sqrt{1-z^4}$ のとるべき 2 通りの値のうち、互いに異なる値になっている (2 に達したと考えた場合、一方は $+\sqrt{-15}$ で一方は $-\sqrt{-15}$)。

よって、一つ目の岸の対に関しては、次のように貼り合わせなくてはいけないことがわかった (それぞれ赤同士、青同士のくっつける)。

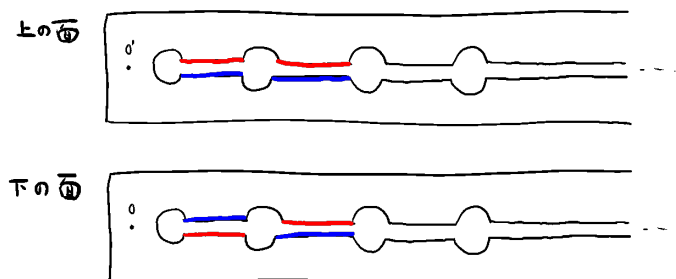


二つ目の岸の対については、次のような上回り、下回りを考えればよい。

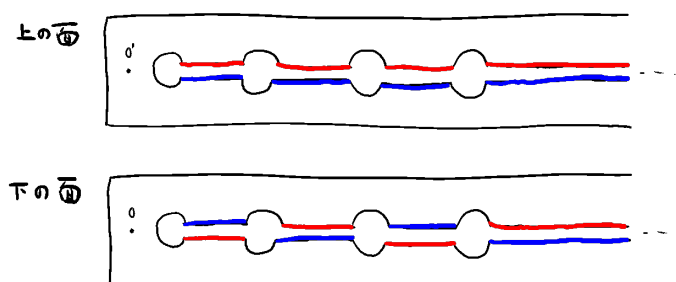


今回はスタート地点で、すべての変数が共通する値をとっているとは言えない。上回りのスタート地点においては $u = 0$ であり、下回りのスタート地点においては $u = 2\pi$ である。そこから、点を動かしていく。すると、終点においては、もともと異なっていた u に加えて、 v が異なる値に帰着する。上回りにおいては、 v は π から 0 に変化し、下回りにおいては、 v は π から 2π に変化する。それらを踏まえて、関数の値の変化をみると、スタート地点では異なっていたわけだが、ゴールでは v のずれによって、互いに一致するようになる。

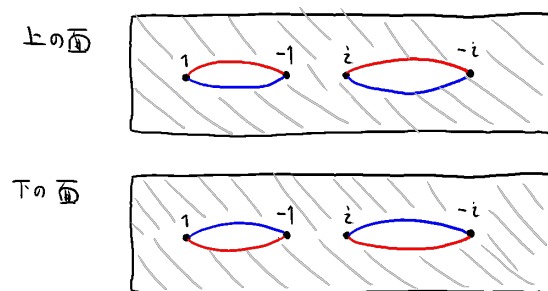
したがって、二つ目の岸の対に関しては、以下のように上の面同士、下の面同士でそのままくっつけて良いことがわかる。



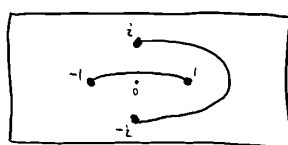
このように、一つ目のような「互い違いにくっつける」と、二つ目のような「そのままくっつける」が、その後も交互に起こることが同様に観察される。よって、最終的には、2つの面を以下のように張り合わせる事となる。



つまり、次のように貼り合わせばよい。

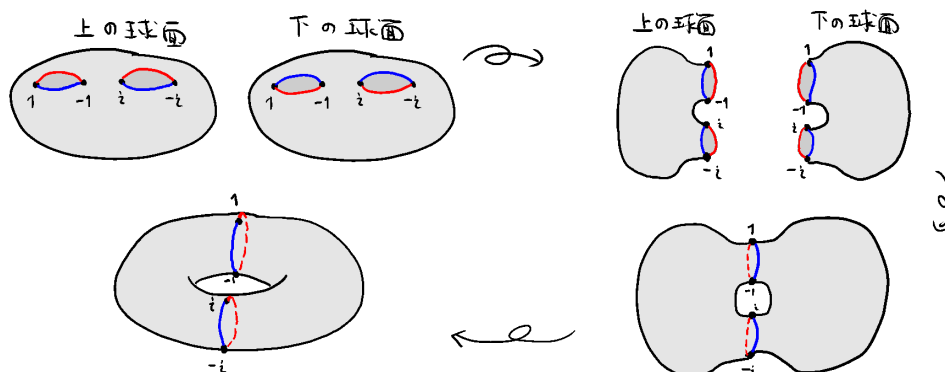


通常的位置に戻せば、貼り合わせるために入れる切り込み (それを移行線という) は以下ようになる：



このように2枚のシートを張り合わせてできるのが $\sqrt{1-z^4}$ のリーマン面である。

そしてそれがわかったならば、 $\sqrt{1-z^4}$ のリーマン球面についても考えることができる。



このように最終的にはトーラスと呼ばれるものになったわけだが、これは3重連結面である。つまり、2回切って初めて連結面に達する。これは種数が1であると言い換えることができる。

楕円積分と楕円関数

$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$ はレムニスケート積分と呼ばれる。レムニスケート積分は楕円積分の例である (レムニスケート曲線は楕円の例ではないのだが!)。楕円積分とは何かというのは重要な話である。実際、リーマンの動機として前述したヤコビの逆問題というものは、楕円積分論の一般化の上で生じる問題である。これらは第二部で詳しく見ることになる。そして、 $\Omega(z) := \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$ の逆関数をレムニスケート関数と呼ぶ。これは楕円関数の例である (一般に楕円関数とは楕円積分の逆関数のことである)。これからの話の構図としては、第4章で扱った $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ に当たるのが、レムニスケート積分で、 $\sin$ に当たるのがレムニスケート関数である。

ここで注目することになる微分 $\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$ は、 $\sqrt{1-z^4}$ のリーマン球面上で考察されるべきものである。 $\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ のときと同様に、まずは分岐点と ∞, ∞' において極となるかどうか調べよう。

- $+1$ において、微分 $\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$ が極でないことが、 $t = \sqrt{z-1}$ と座標変換することで確認できる。そのとき微分式 $dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{dz}{\sqrt{z-1}}$ が誘導されるので、

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{2}{\sqrt{-(t^6 + \dots + 4)}} dt$$

と計算でき、変換後、 $t = 0$ において有限の値を取るため、問題の微分は $z = 1$ で極でない。 $z = -1$ のときも同様に問題ないことが確認される。

- $+i$ において、微分 $\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$ が極でないことが、 $t = \sqrt{z-i}$ と座標変換することで確認できる。そのとき微分式 $dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{dz}{\sqrt{z-i}}$ が誘導されるので、

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{2}{\sqrt{-(t^6 + \dots - 4)}} dt$$

と計算でき、変換後、 $t = 0$ において有限の値を取るため、問題の微分は $z = i$ で極でない。 $z = -i$ のときも同様に問題ないことが確認される。

- ∞, ∞' について、微分 $\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$ が極でないことが、 $t = \frac{1}{z}$ と座標変換することで確認できる。そのとき

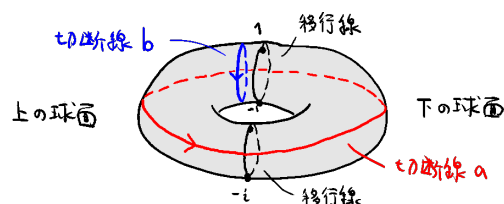
微分式 $dz = -\frac{1}{t^2} dt$ が誘導されるので、

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = -\frac{dt}{\sqrt{t^4-1}}$$

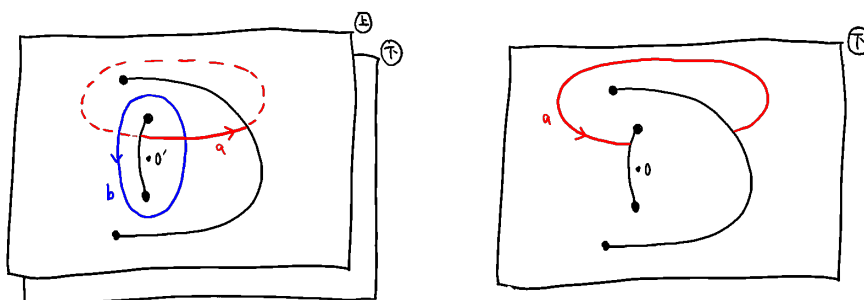
と計算でき、変換後、 $t=0$ において有限の値を取るため、問題の微分は $z = \infty, \infty'$ で極でない。

以上より、微分 $\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$ は至るところ有限である。したがって、この微分の舞台として、 $\sqrt{1-z^4}$ のリーマン球面をそのまま考えることとなる。それを $\mathfrak{R}$ とおく。

$\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$ のときと同様に、 $\mathfrak{R}$ を単連結面に切り開こう。そこでは、積分が道の取り方に依らなくなる。どう切れば単連結面になるのかは、トーラスで考えればわかりやすい。



座標の表示を優先した見方の上では、この2本の切断線は次のようになっている：



切断後の面を $\mathfrak{R}'$ とし、 $\mathfrak{R}'$ 上での積分 $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$ を $W(z)$ と書く。このとき、これは一価関数である。そして、 $\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ のときと同様に、周期モジュールによるレムニスケート積分 $\Omega(z)$ の計算法がわかる。そこで、

切断線 a 上の積分

$$\int_{\mu}^{\lambda} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = W(\lambda) - W(\mu)$$

$$=: A \text{ とする}$$

切断線 b 上の積分

$$\int_{\mu}^{\lambda} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = W(\lambda) - W(\mu)$$

$$=: B \text{ とする}$$

とそれぞれの切断線の周期モジュールを A, B とする。これらはもちろん切断線の取り方に依らないし、切断線上の点の取り方にも依らない。この2つの定数を使って、 $\Omega(z)$ は次のように計算できる：

$$\Omega(z) = W(z) + A \cdot (\text{切断線 a をまたいだ回数}) + B \cdot (\text{切断線 b をまたいだ回数})$$

ただし、切断線の向きに沿って左から右にまたいだとき +1 回、右から左にまたいだとき -1 回と数える。

以上より、各 z に対し、 $\Omega(z) = W(z) + Am + Bn$ ($m, n \in \mathbb{Z}$) とかける。よって、その逆関数であるレムニスケート関数を $F(w)$ とおくと、複素数 $w = \Omega(z)$ に対し、 $F(w) = F(w + Am + Bn)$ がいえるため、 F は 2 重周期関数であるといえる^{*4}。

^{*4} A が B 実数の定数倍でないことは確認できる。

第II部

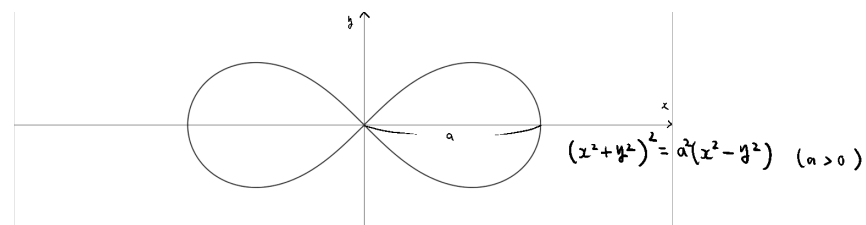
歴史探求：ヤコビの逆問題とは何か

第5章 すべての始まり：レムニスケート積分の加法定理

$\sin$ の加法定理については誰もが知っている。これから見ることになる「レムニスケート関数の加法定理」という呼称を踏まえるなら、それは「円関数の加法定理」と呼ぶのがふさわしいだろうか。その発見をしたのはオイラーであるが、最初からそれを発見しようとしていたわけではない。オイラーはただ微分方程式が解きたかった。そこにファニャノのたまたまの発見が伝わり、そこから多くの人を巻き込んでいく広大な理論の泉が生まれたのである。

ファニャノの発見

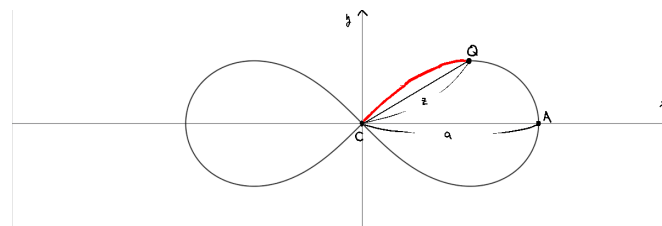
ファニャノはベルヌーイ一家の研究に触発され、「レムニスケート弧を楕円弧と双曲線弧で表す」という目的の論文を書いた。それはファニャノの 32 番目の論文であり、1750 年に出版された論文集 ([7]) にまとめられている。ところで、レムニスケート曲線とは、以下のように定義される代数曲線である。



円錐曲線の例になっている楕円や双曲線と比べて、それは難しいもの、未知のものと位置づけられていた。よって、ファニャノが掲げた主題というのは「難しいものを簡単なもので表す」という意味で、自然と動機が理解される。そして、後に続く論文で見ることになる、そこから生まれた発見というのが、楕円積分論という 100 年以上続く分野の起点となる。

Fagnano 32 を読む

まずは Fagnano 32 で語られる数学を体験するために、レムニスケート曲線の弧を求めてみよう。



変化量 z に依存した弧 $\widehat{CQ}$ を求める. つまり, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ と置き, $\widehat{CQ} = \int_0^z \sqrt{dx^2 + dy^2}$ を計算すればよい. まず, $z^2 = x^2 + y^2$ と, それとレムニスケートの方程式によって得られる $z^4 = a^2(x^2 - y^2)$ の両辺を微分することで,

$$zdz = xdx + ydy, \quad \frac{2z^3}{a^2}dz = xdx - ydy$$

が得られる. これを dx, dy に関する連立方程式として解くことにより,

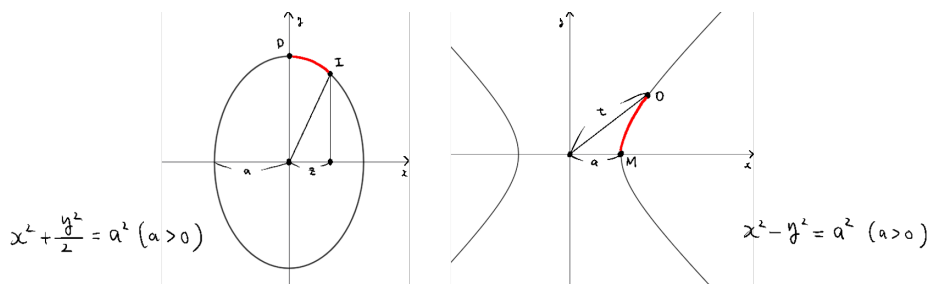
$$dx = \frac{z(a^2 + 2z^2)}{2a^2x}dz, \quad dy = \frac{z(a^2 - 2z^2)}{2a^2y}dz$$

となる. よって, これらを代入すれば,

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 &= \frac{z^2}{4a^4} \cdot \frac{y^2(a^2 + 2z^2)^2 + x^2(a^2 - 2z^2)^2}{x^2y^2} dz^2 \\ &= \frac{z^2}{4a^4} \cdot \frac{a^4z^2 - 4z^6 + 4z^6}{z^4 - \frac{z^8}{a^4}} dz^2 \\ &= \frac{a^4}{a^4 - z^4} dz^2 \end{aligned}$$

と計算できるため, $\widehat{CQ} = \int_0^z \frac{a^2}{\sqrt{a^4 - z^4}} dz$ が得られる.

次に, 以下の楕円と双曲線について考えると,



変化量 z に依存した楕円弧 $\widehat{DI}$ と, 変化量 t に依存した双曲線弧 $\widehat{MO}$ は, レムニスケート弧を求めたときと同じように計算を進めれば,

$$\widehat{DI} = \int_0^z \frac{\sqrt{a^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 - z^2}} dz, \quad \widehat{MO} = \int_0^t \frac{t^2}{\sqrt{t^4 - a^4}} dt$$

と求めることができる.

その上で, ファニャノは以下の結果を提示した.

定理. $t = a \frac{\sqrt{a^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 - z^2}}$ のとき,

$$\int_0^z \frac{a^2}{\sqrt{a^4 - z^4}} dz = \int_0^z \frac{\sqrt{a^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 - z^2}} dz + \int_0^t \frac{t^2}{\sqrt{t^4 - a^4}} dt - \frac{zt}{a} \quad (*)$$

つまり,

$$\widehat{CQ} = \widehat{DI} + \widehat{MO} - \frac{zt}{a}$$

が成り立つ.

まさに「レムニスケート弧を楕円弧と双曲線弧で表す」である． $-\frac{zt}{a}$ という項があるが，これは，超越関数かもしれない弧の積分と比べて，代数関数というなじみのあるものという認識のため，おまけ程度に思っておけばよい．証明は簡単な計算で済む．まず式 (*) の両辺を微分した等式

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^4 - z^4}} dz = \frac{\sqrt{a^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 - z^2}} dz + \frac{t^2}{\sqrt{t^4 - a^4}} dt - \frac{t}{a} dz - \frac{z}{a} dt$$

が成り立つことを， $t = a \frac{\sqrt{a^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 - z^2}}$ と，その微分 $t dt = \frac{2a^4 z}{(a^2 - z^2)^2} dz$ を使って， t と dt を z と dz で表すことにより確認し，最後に $z = 0$ のとき $t = a$ であることを踏まえて，その微分式を積分すれば，(*) が得られる．

Fagnano 33 を読む

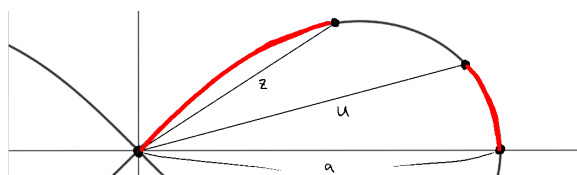
続く 33 番目の論文で，先ほど出てきた $t = a \frac{\sqrt{a^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 - z^2}}$ という変換を $u = a \frac{\sqrt{a^2 - z^2}}{\sqrt{a^2 + z^2}}$ と少し形を変えてみると，この場合にも，とある積分同士の関係式が成り立つことが書かれている．

定理. $u = a \frac{\sqrt{a^2 - z^2}}{\sqrt{a^2 + z^2}}$ のとき，

$$\int_0^z \frac{a^2}{\sqrt{a^4 - z^4}} dz = \int_u^a \frac{a^2}{\sqrt{a^4 - z^4}} dz$$

が成り立つ．

これは Fagnano 32 のときと同じように計算で示すことができる．では，これは幾何学的にはどう解釈されるべきであろうか．先ほどのグラフ上での説明のように， $z = 0$ から，第一象限内で z を増加させていった場合， $z = a$ の時点というのは，動かしていた半径なるものが x 軸の正の方向を向くときである．つまり， z, u は



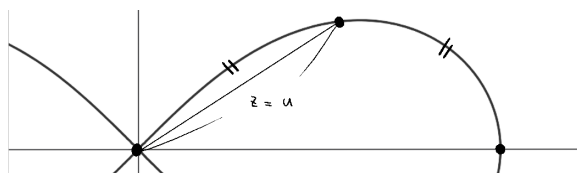
と解釈されるべきである．

ここで，試みに， $u = z$ としてみると，関係式から， $z = a \frac{\sqrt{a^2 - z^2}}{\sqrt{a^2 + z^2}}$ であり，整理すると，

$$z^4 + 2a^2 z^2 - a^4 = 0$$

$$z = a\sqrt{\sqrt{2} - 1}$$

と解ける．したがって，



となることがわかった．つまり，いつ第一象限において弧が 2 等分されるかがわかったのである．これは，最初から狙っていたのではなく，前の結果を少し工夫することで，計算上得られたきれいな結果というのが先にあり，たまたまそれが幾何学的に重要な意味をもつこととなったという認識が適切であるように私は考える．

Fagnano 34 を読む

続く論文で、さらに次のような結果を提示する。

定理. $\frac{\sqrt{2}u}{\sqrt{1-u^4}} = \frac{1}{z}\sqrt{1-\sqrt{1-z^4}}$ のとき、

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{2du}{\sqrt{1-u^4}}$$

まず、前回から 2 つ慣習が変わっている。まず前回までは、積分を結ぶ等式を与えていたのに対し、今回は微分式という形で提示している。これまでも証明するに至っては、その微分式において計算していたわけで、論理的に違いはないわけだが、積分することで初めて弧として幾何学的な意味が与えられるため、より幾何学的解釈から離れた抽象的な計算に居場所を置きつつある兆候と思うこともできるかもしれない。また、式の形から、今回もレムニスケート曲線における解釈を想定した場合、今回は、前回までにおける $a = 1$ のときについての結果となっている。最初の結果と違って、もうレムニスケートしか出てきていないのであるし、それは些細なことである。

与えられた z, u の関係式を整理すると、 $2u^2z^2 + u^2 - 1 = -(1-u^4)^2(1-z^4)$ となり、 $u = 0$ のとき、 $z = 0$ となることからわかるため、微分式を積分することで、

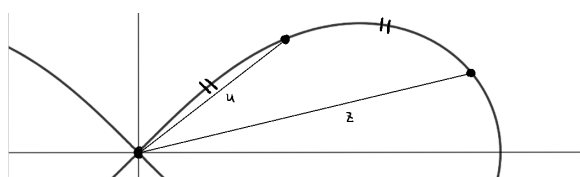
$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = 2 \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$$

という結果が得られる。この幾何学的解釈としては、

u における弧の長さの 2 倍の弧の長さをもつ、半径なるものの距離を z としたときの、 u と z 関係式が

$$\frac{\sqrt{2}u}{\sqrt{1-u^4}} = \frac{1}{z}\sqrt{1-\sqrt{1-z^4}}$$

で与えられる。



ということになる。これは、後の考察を踏まえると、「レムニスケート積分の倍角公式」と呼ぶのが適切であることがわかる。

第 6 章 ファニャノからオイラーへ

今まで見てきたファニャノの結果を、単なる微分方程式の問題とすることもできる。最初の結果でいえば、微分式

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^4 - z^4}} dz = \frac{\sqrt{a^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 - z^2}} dz + \frac{t^2}{\sqrt{t^4 - a^4}} dt - \frac{t}{a} dz - \frac{z}{a} dt$$

を $t = a \frac{\sqrt{a^2+z^2}}{\sqrt{a^2-z^2}}$ が満たすということであり、 t は z の関数と思えるので、これは「与えられた微分に関する関係式を満たす関数を探す」という微分方程式の問題そのものである。

そして、当時の微分方程式論の第一人者としてオイラーがいた。オイラーは 1751 年にファニャノの論文を初めて目にし、そこからその結果を拡張していくことになる。

6.1 E252,E251 を読む

E251,E252([8],[9]) は、オイラーがファニャノの論文を読んでから 2,3 年後に執筆された論文である。252,251 というのは出版された時期の早い方から並べられた番号であるが、この 2 つに関しては執筆の時期が逆転しているため、E252 の方が先である。これら 2 つの論文で、オイラーはファニャノのレムニスケート弧に関する研究を引き継いだ。そして、その集大成となる以下の結果を得た。

定理. $x^2 + y^2 + c^2 x^2 y^2 = c^2 + 2xy\sqrt{1-c^4}$ (c : 定数) のとき、

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}$$

が成り立つ。

関係式から、 $y=0$ のとき、 $x=c$ である。よって、提示された微分式を積分して、

$$\begin{aligned} \int_c^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} &= \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} \\ \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} &= \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} + \int_0^c \frac{dc}{\sqrt{1-c^4}} \end{aligned}$$

が得られる。設定においては、 c は x, y に対し、定数という認識だったが、ここにおいては、 x, y と平等の変化量と思った方が、式に対称性が現れるという意味でも自然である。

これは「レムニスケート積分の加法定理」と呼ばれるものである。如何にしてこれが加法定理と呼ばれるのか。その意味を明らかにするために、まずはよく知られた $\sin$ の加法定理について再考してみる。

6.2 $\sin$ の加法定理とは何だったか

$\sin$ は $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ の逆関数として定義された。右辺の積分を、円の弧長を求める積分ということで円積分と呼ぶことにしよう。同様に、今までずっと考えてきたレムニスケート弧を求める積分 $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$ は、レムニスケート積分と呼ぶことにする。しかし、ここで注意として、同じ流れで楕円弧を求める積分が楕円積分と呼ばれるわけではない。楕円積分という言葉は、後により一般の意味で定義され、楕円弧を求める積分は、そのひとつの例という位置づけである。

すなわち、円積分の逆関数として $\sin$ がある。そして、その加法定理とは、 $\cos$ も $\sin$ で表すようにして書くと、

$$\sin(\theta + \varphi) = \sin \theta \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} + \sin \varphi \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$$

である。これは次のように書き直すことができる。 $\psi = \theta + \varphi$ と置き、

$$x = \sin \psi, \quad y = \sin \theta, \quad c = \sin \varphi$$

と置く。これらは,

$$\psi = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \theta = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}, \quad \varphi = \int_0^c \frac{dc}{\sqrt{1-c^2}}$$

と同じことである。このとき、加法定理は,

$$x = y\sqrt{1-c^2} + c\sqrt{1-y^2}$$

と表され、 $\psi = \theta + \varphi$ は,

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \int_0^c \frac{dc}{\sqrt{1-c^2}}$$

と表される。したがって、通常の $\sin$ の加法定理が成り立つことから、

$$x = y\sqrt{1-c^2} + c\sqrt{1-y^2}$$

のとき,

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \int_0^c \frac{dc}{\sqrt{1-c^2}}$$

が成り立つ。さらに、 c を定数として、両辺を微分すれば、微分式

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

が成り立つ。

ということが言える。これは逆も成り立つ。すなわち、 $\sin$ の加法定理の主張は、

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

という微分方程式の解として、

$$x = y\sqrt{1-c^2} + c\sqrt{1-y^2} \quad (c: \text{定数})$$

がある。

という主張と同値である。これは $\sin$ の加法定理を、 $\sin$ の逆関数である円積分 $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ の言葉に書き換えたものと思える。よって、これを「円積分の加法定理」と呼ぶことにする。つまり、通常の「 $\sin$ の加法定理」と「円積分の加法定理」は同値である。

微分方程式論におけるオイラーの言葉の使い方

現代にも通ずる言葉の使い方として、 $\frac{dy}{dx} = 2x$ に対して、 $y = x^2$ をその積分という。一方、これは $y = x^2$ が微分方程式 $\frac{dy}{dx} = 2x$ の解であるということもできる。それと同様に、オイラーは微分方程式の解のことを、その微分方程式の積分と呼んでいた。特に、その微分方程式の積分が代数関数を定めるときは、代数的な積分と呼んでいた。

また、先ほどの $\frac{dy}{dx} = 2x$ の積分は、いわゆる定積分であり、不定積分ではない。なぜなら、積分定数が含まれていないからである。積分というのは、注目している変数に依存しない定数が含まれて初めて、一般解と

なる。それと同様に、オイラーは微分方程式の積分が定数を含んでいるとき、その積分を完全積分と呼んでいた。つまり、完全積分とは一般解というようなニュアンスである。

これらのオイラーの言葉の使い方に従うと、先ほどの円積分の加法定理は、微分方程式 $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$ の代数的完全積分を求めたということになる。

6.3 レムニスケート積分の加法定理

では話を戻そう。オイラーの結果を再掲する：

微分式 (微分方程式)

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}$$

は、

$$x^2 + y^2 + c^2 x^2 y^2 = c^2 + 2xy\sqrt{1-c^4} \quad (c: \text{定数})$$

という代数的完全積分をもつ。

円積分の加法定理とのアナロジーから、これをレムニスケート積分の加法定理と呼ぶのがふさわしいことがわかるだろう。よって、ここから、"sin の" 加法定理に対応する話を持ち出すことも可能である。sin は円積分の逆関数であった。そこで、レムニスケート積分の逆関数を $F(\theta)$ とする。これがレムニスケート関数と呼ばれるものである。これは、sin に当たるものであるから、その場合、sin を円関数と呼ぶのが自然かもしれない。

$y = F(\theta), c = F(\varphi), x = F(\theta + \varphi)$ と置くと、定義から、

$$\theta + \varphi = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \quad \theta = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}, \quad \varphi = \int_0^c \frac{dc}{\sqrt{1-c^4}}$$

ということになり、

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} + \int_0^c \frac{dc}{\sqrt{1-c^4}}.$$

これは微分式 $\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}$ の積分のうち、定数を決める条件 (初期条件) が、 $y = 0 \Rightarrow x = c$ であるため、レムニスケート積分の加法定理から、

$$x^2 + y^2 + c^2 x^2 y^2 = c^2 + 2xy\sqrt{1-c^4}$$

と同値である。これを x の 2 次方程式として解けば、

$$x = \frac{y\sqrt{1-c^4} + c\sqrt{1-y^4}}{1 + y^2 c^2}$$

となる。よって、

$$F(\theta + \varphi) = \frac{F(\theta)\sqrt{1-F(\varphi)^4} + F(\varphi)\sqrt{1-F(\theta)^4}}{1 + F(\theta)^2 F(\varphi)^2}$$

を得る。これがレムニスケート関数の加法定理である。

しかし、今の話はオイラーの文献に見られることはなく、このレムニスケート積分の逆関数であるレムニスケート関数 (さらにその一般化である楕円積分の逆関数である楕円関数) は、アーベルが登場するまで注目さ

れることはない。なぜオイラーは、その研究に進まなかったのか。私の認識としては、2つ要因があり、まずオイラーは微分方程式の研究としてこの主題を見ていたということ、そして実際に研究することができなかったということが挙げられる。研究するとしたら、それは $\sin$ に並ぶ超越関数として、その対象を研究していくことになるわけで、 $\sin$ のときと同じように、その近似や級数展開などが明らかになって初めて、立派な結果となる。つまり、そういう意味で満足のいく結果が期待できなかったため、この単なる逆関数側への加法定理の結果の書き換えという話をする価値はオイラーにとってなかったのかもしれない。

6.4 オイラーによる一般化

オイラーは E251 の最後に、とんでもなく一般的な結果を提示する。それは、微分式

$$\frac{dx}{\sqrt{A+2Bx+Cx^2+2Dx^3+Ex^4}} = \frac{dy}{\sqrt{A+2By+Cy^2+2Dy^3+Ey^4}}$$

の代数的完全積分を明示するという結果である。つまり、レムニスケート積分で $1-z^4$ であった多項式の部分が、一般の 4 次多項式 $A+2Bz+Cz^2+2Dz^3+Ex^4$ に一般化されているのである。論文での説明の仕方からして、これは何か我々にも通じる意味のある段階を経て得た結果というよりは、技巧的な計算によりもたらされたものといった印象である。

その代数的完全積分をここに表記するのは、かなり骨が折れるので、後に参照することにもなる、オイラーによるもう少し特殊な結果を、ここに明記することにする。

定理. c, e をあらかじめ定数としてとっておく。微分式

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-c^2y^2)(1+e^2y^2)}}$$

は、代数的完全微分積分

$$0 = t^2 - x^2 - y^2 - c^2 e^2 t^2 x^2 y^2 + 2xy \sqrt{(1-c^2 t^2)(1+e^2 t^2)} \quad (t: \text{定数})$$

をもつ。

第 7 章 ルジャンドルによる楕円積分の分類

オイラー以降、ラグランジュ、ランデンらが同様の積分の研究を進めていったが、後のアーベル、ヤコビの研究から始まる新たな方向性を重視した上で、それらを取り上げる価値を見いだすことはなかなか難しい。それを後押しする事実として、ラグランジュ、ランデン以後、アーベル、ヤコビ以前に、ルジャンドルによる素晴らしい仕事が存在する。彼は、彼楕円積分論に関する彼以前の研究に、新しい結果をもたらしたとは言いがたかったが、彼以前の研究をうまくまとめ上げた。それを象徴する教科書として、Legendre 1811([10])、通称「積分計算演習」というものがあり、アーベルもヤコビもこれで楕円積分論を勉強したようだ。

アーベルとヤコビへの接続を図る上で、ルジャンドルの重要な仕事のひとつとして、「楕円積分の簡単なものへの還元」が挙げられる。それは 3 種の楕円積分にすべてを還元しようという考えであり、そこでの「第一種、第二種、第三種」という呼称は、意味こそ違えど、現代のリーマン面の理論においても見られる。

そういうわけで、この章では、「積分計算演習」の拡張版である Legendre 1825([11]) を参考にして、ルジャンドルがどのように、その 3 種に至ったのかを見ていく。

注意. ここで呼称に関する厄介な問題がある。ルジャンドルやそれに続くアーベルらは、現代でいう楕円積分のことを楕円関数と呼んでいた。つまり、先ほど我々がレムニスケート積分と呼んでいたものは、その習わしでいくと、レムニスケート関数と呼ばれることになる。その習わしは、後にヤコビにより改められることになり、ルジャンドルらの呼んでいた楕円関数を楕円積分とし、楕円積分の逆関数を楕円関数と呼ぶことになる。我々は以降、その改まった呼び方、つまり現代における呼び方で統一する。

7.1 還元のステップ

オイラーの研究に引き続き、注目されるものは、

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}}$$

という形の微分である。ルジャンドルの掲げる目標は、

この微分をより簡単な形に変換していくこと

である。ここでいう変換とはなんだろうか。ここでファニャノとオイラーによる諸結果を振り返ってみる。例として、ファニャノの 3 つ目の結果を見てみよう。

$\frac{\sqrt{2}u}{\sqrt{1-u^4}} = \frac{1}{z} \sqrt{1 - \sqrt{1-z^4}}$ のとき、

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{2du}{\sqrt{1-u^4}}$$

今までの話から、これを「レムニスケート曲線の倍角公式」と幾何学的に解釈することもできるし、「 $\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{2du}{\sqrt{1-u^4}}$ という微分方程式の解の提示」とも思えた。ここでさらにもう一つ、

(代数的な) 変数変換 $\frac{\sqrt{2}u}{\sqrt{1-u^4}} = \frac{1}{z} \sqrt{1 - \sqrt{1-z^4}}$ によって、微分 $\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$ を微分 $\frac{2du}{\sqrt{1-u^4}}$ に変換した

という見方がある。そのような意味で、ルジャンドルは一般的な形の微分を、より簡単な形に変換していくということを掲げている。これは、楕円積分論の変換理論としての側面と言われたりもする。それは、主にヤコビが引き継いでいくことになる。

Step 1: 偶冪のみの形へ

$R = \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}$ とおく。このルートの中身は正とする。ここで、

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 = (\zeta + 2\eta x + \theta x^2)(\lambda + 2\mu x + \nu x^2)$$

と分解されるとする。このとき右辺も正となるため、右辺の 2 つの因子は同符号である。よって、

$$\zeta + 2\eta x + \theta x^2 = (\lambda + 2\mu x + \nu x^2)y^2$$

となるように y をとることができる．この式を x について整理すると，

$$(\theta - \nu y^2)x^2 + 2(\eta - \mu y^2)x + \zeta - \lambda y^2 = 0$$

これは x の 2 次方程式として次のように解ける：

$$x = \frac{\mu y^2 - \eta + \sqrt{(\eta - \mu y^2)^2 - (\theta - \nu y^2)(\zeta - \lambda y^2)}}{\theta - \gamma y^2}.$$

ここで現れた $\sqrt{(\eta - \mu y^2)^2 - (\theta - \nu y^2)(\zeta - \lambda y^2)}$ を Y とおくと，

$$x = \frac{\mu y^2 - \eta + Y}{\theta - \gamma y^2}$$

となる．また $\zeta + 2\eta x + \theta x^2 = (\lambda + 2\mu x + \nu x^2)y^2$ を微分することで，

$$((\theta - \nu y^2)x + \eta - \mu y^2) dx = (\lambda + 2\mu x + \nu x^2)y dy$$

が得られる．以上から得られた式と微分式により， x と dx を y と dy に置き換えると，

$$\frac{dx}{R} = \frac{dy}{Y}$$

ときれいに計算できることがわかる．このとき Y のルートの中身は偶幂のみからなることに注意する．

これをもう少し一般的な結果にしよう． P を x の有理関数とする． x を y に変換した場合，

$$x = \frac{\mu y^2 - \eta + Y}{\theta - \gamma y^2}$$

より， P は y の関数として，

$$P = P' + P''Y \quad (P', P'' : \text{偶幂のみからなる } y \text{ の有理関数})$$

とできる．したがって，

$$\frac{Pdx}{R} = \frac{P'dy}{Y} + P''dy$$

と変換することができる．有理関数の積分は (代数関数) + log(代数関数) の形でかけるため，前にも触れたように，未知の超越関数についてのこの主題において，それは既知のものということになる．よって，この変換により， $\frac{Pdx}{R}$ は $\frac{P'dy}{Y}$ に還元されたといえる．

以上より，最も一般的な形 $\frac{Pdx}{R}$ は，偶幂のみからなるものへ還元できることがわかった．

Step 2: sin より次数を下げる

Step 1 を踏まえて，今回のスタート地点は，

$$\frac{M}{R}dx \quad (M : \text{偶幂のみからなる } x \text{ の有理関数}, R = \sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4})$$

である．ただし， $\alpha \neq 0, \gamma \neq 0$ とする．

まずは， $\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4$ の因子が虚数のとき，すなわち $\alpha + \beta X + \gamma X^2 = 0$ が虚数解をもつときを考える．このとき，判別式から $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$ であり， α と γ の符号は同じである． $\alpha > 0, \gamma > 0$ のときについてこれから変換を試みていく．

まず、因子が虚数であるということから、

$$\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 = \lambda^2 + 2\lambda\mu x^2 \cos \theta + \mu^2 x^4 \quad (\lambda, \mu > 0, 0 < \theta < \pi)$$

とおける。唐突に思われたかもしれないが、これは 18 世紀における常套手段である。実際には、 $\alpha = \lambda^2, \gamma = \mu^2$ とおいた上で、判別式を踏まえて、

$$0 < \left(\frac{\beta}{2\lambda\gamma} \right)^2 < 1$$

を $\cos^2 \theta$ でおいているだけである。

ここで $x = \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} \tan \frac{\varphi}{2}$, $c = \sin \frac{\theta}{2}$ とおくと、

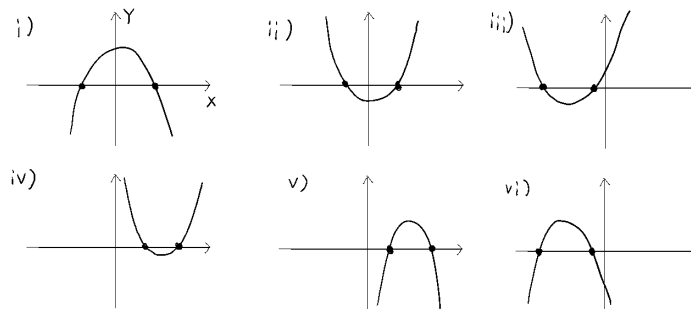
$$\begin{aligned} \alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 &= \lambda^2 + 2\lambda\mu x^2 \cos \theta + \mu^2 x^4 \\ &= \lambda^2 \left(1 + 2(1 - 2c^2) \tan^2 \frac{\varphi}{2} + \tan^4 \frac{\varphi}{2} \right) \\ &= \lambda^2 \left(\left(1 + \tan^2 \frac{\varphi}{2} \right)^2 - 4c^2 \tan^2 \frac{\varphi}{2} \right) \\ &= \frac{\lambda^2}{\cos^4 \frac{\varphi}{2}} \left(1 - 4c^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right) \\ &= \frac{\lambda^2}{\cos^4 \frac{\varphi}{2}} (1 - c^2 \sin^2 \varphi) \end{aligned}$$

と計算できる。以上より、 $x = \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} \tan \frac{\varphi}{2}$ の微分を踏まえれば、

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda\mu}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}$$

と変換できることがわかる。ここで、定義から $0 < c < 1$ であることに注意しておく。 $\alpha < 0, \gamma < 0$ のときについても同様の形に変換することができる。

続いて、 $\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4$ の因子が実のときについて考える。このとき、 $Y = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ のグラフは以下の 6 通りに場合分けされる：



これらすべての場合について、それぞれ適切な変数変換をすれば、因子が虚数のときと同じ形に変換することができる。今回は、最初の i) の場合についてのみ紹介する。

i) のとき、 $\alpha > 0$ より、 $\alpha = m^2$ とおき、 X についての 2 つの解は異符号であることから、その 2 解を $-\frac{1}{p^2}, \frac{1}{q^2}$ とする。そうすると、

$$\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 = m^2(1 + p^2 x^2)(1 - q^2 x^2)$$

となることがわかる．ここで， $x = \frac{1}{q} \cos \varphi$ ， $c^2 = \frac{p^2}{p^2+q^2}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 &= m^2(1 + p^2 x^2)(1 - q^2 x^2) \\ &= m^2(1 - \cos^2 \varphi) \left(1 + \frac{p^2}{q^2} \cos^2 \varphi\right) \\ &= m^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \frac{p^2 + q^2}{q^2} (1 - c^2 \sin^2 \varphi)\end{aligned}$$

と計算できる．よって， $dx = -\frac{1}{q} \sin \varphi$ を踏まえると，

$$\begin{aligned}\frac{dx}{R} &= -\frac{1}{qm} \cdot \sqrt{\frac{q^2}{p^2 + q^2}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}} \\ &= -\frac{c}{pm} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}\end{aligned}$$

と変換できる．ここでも，定義から $0 < c < 1$ となっていることに注意する．他の 5 通りについても，適切に変数変換することで同様の変換ができる．

以上より，一般に

$$\frac{dx}{R} = C \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}} \quad (C, c: \text{定数}, 0 < c < 1)$$

と変換できることがわかった．

最後に， $\frac{Mdx}{R}$ という有理関数 M も含めての変換の結果を導く．因子が実の場合の i) のときの変換は， $x = \frac{1}{q} \cos \varphi$ というものだった．これは $x^2 = \frac{A+B \sin^2 \varphi}{C+D \sin^2 \varphi}$ という変換の形に当てはまる．実は，他の 5 通りの場合も，この形に当てはまるような変換が用いられている．よって，因子が実のときに限り， $x^2 = \frac{A+B \sin^2 \varphi}{C+D \sin^2 \varphi}$ という形の変換をしていたことになる．そしてそのときは，偶幂のみからなる $\sin \varphi$ の有理関数 Q がとれて，

$$\frac{Mdx}{R} = \frac{Qd\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}$$

と変換できることがわかる．以降，ここまで変換ができる，因子が実の場合のみを考えていく．

Step 3: 有理関数を分解する

Step 2 までを踏まえて， $\Delta = \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}$ ($0 < c < 1$) とおき，

$$\frac{Qd\varphi}{\Delta} \quad (Q: \text{偶幂のみからなる } \sin \varphi \text{ の有理関数})$$

について考えていく．

まずは Q が多項式のときについて考える．つまり，

$$Q = A + B \sin^2 \varphi + C \sin^4 \varphi + \cdots$$

とおくことができる．現代では，自然数を添え字につけて， $Q = a_0 + \cdots + a_n \sin^2 \varphi$ とおくのが普通だが，当時はこのようにおくのが通例だった．多項式といっているわけだから，有限項で終わることはわかるし，添え字が無い分，表記がすっきりしているというメリットもあるかもしれない．本文の表記そのままに，この習わしで説明していく．また， $Z^{2k} = \int_0^\varphi \frac{\sin^{2k} \varphi}{\Delta} d\varphi$ とすると，

$$\int_0^\varphi \frac{Qd\varphi}{\Delta} = AZ^0 + BZ^2 + CZ^4 + \cdots$$

と書ける.

ここで、部分積分をするために、 $\Delta \cdot \cos \varphi \cdot \sin^{2k-3} \varphi$ の微分を計算してみよう. $\frac{d\Delta}{d\varphi} = -\frac{c^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\Delta}$ を踏まえると、ライプニッツ則から、その微分は、

$$(2k-3) \frac{\sin^{2k-4} \varphi d\varphi}{\Delta} - (2k-2)(1+c^2) \frac{\sin^{2k-2} \varphi d\varphi}{\Delta} + (2k-1)c^2 \frac{\sin^{2k} \varphi d\varphi}{\Delta}$$

と計算できる. よって積分することで、

$$\Delta \cdot \cos \varphi \sin^{2k-3} \varphi = (2k-3)Z^{2k-4} - (2k-2)(1+c^2)Z^{2k-2} + (2k-1)c^2 Z^{2k}$$

が得られる. これを繰り返し用いることで、

$$\int_0^\varphi \frac{Qd\varphi}{\Delta} = (\sin \varphi \text{ の代数関数}) + \int_0^\varphi (A + B \sin^2 \varphi) \frac{d\varphi}{\Delta}$$

という形にかけることがわかる. 何度も言うように、今回考えている主題において、代数関数というのは既知のものである. よって、これをもって、 $\int_0^\varphi \frac{Qd\varphi}{\Delta}$ を $\int_0^\varphi (A + B \sin^2 \varphi) \frac{d\varphi}{\Delta}$ に帰着できたと思ってよいのである.

次に、一般に Q が有理関数の場合を考えていく. ただ話に入る前に「有理関数の部分分数分解」について説明しなくてはならない. これも 18 世紀では常識であったが、現在の教育カリキュラムには含まれないものだ. この説明のために、変数 t の有理関数 $F(t)$ を考える.

普通、部分分数分解と聞くと、

$$\frac{\frac{1}{2}}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}$$

を思い浮かべるだろう. これは次のように一般化することができる:

$f(t), g(t)$ が多項式として互いに素なら、

$$\frac{1}{f(z)g(z)} = \frac{u(t)}{f(t)} + \frac{v(t)}{g(t)} \quad (\exists u(t), v(t))$$

よって、これを繰り返し用いることで、

$$F(t) = \frac{h(t)}{t^{k_0}(1+a_1t)^{k_1} \cdots (1+a_mt)^{k_m}} = h(t) \left(\frac{g_0(t)}{t^{k_0}} + \frac{g_1(t)}{(1+a_1t)^{k_1}} + \cdots + \frac{g_m(t)}{(1+a_mt)^{k_m}} \right)$$

と書くことができる. 以降、 $\frac{g_0(t)}{t^{k_0}}$ という項に関しては、 $\frac{g(t)}{(1+at)^k}$ という形の項と同様なことができるため無視する. ここで、以下を用いる:

$g(t)$ を次数が k 以下の多項式とすると、

$$\frac{g(t)}{(1+at)^k} = \frac{b_k}{(1+at)^k} + \frac{b_{k-1}}{(1+at)^{k-1}} + \cdots + \frac{b_1}{1+at} + b_0$$

とできる. これは、両辺の分母を払い、係数比較によって b_i が決定できることから従う.

これにより、

$$F(t) = (t \text{ の多項式}) + \sum_{N,n,k} \frac{N}{(1+nt)^k}$$

という形にかけることがわかった。ただし、 N, n, k は適当な値をとり、 $\sum$ は有限和である。

以上の有理関数の分解の話を踏まえると、

$$Q = (x \text{ の多項式}) + \sum_{N,n} \frac{N}{(1+nx^2)^k}$$

とかける。ただし、 $x = \sin \varphi$ と置いている。よって、今から

$$\Pi^k := \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2 \varphi)^k \Delta} = \int_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)^k \sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

の簡略化を試みる。 $R = \sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}$ とおいておく。

ここで、部分積分をするために、 $x \cdot (1+nx^2)^{-k+1} \cdot R$ の微分を計算すると、

$$\frac{1}{(1+nx^2)^k R} (-2n(k-1)x^2(1-(1+c^2)x^2+c^2x^4) + (1-2(1+c^2)x^2+3c^2x^4)(1+nx^2)) dx$$

となり、 $1+nx^2$ について整理するために、 $t = 1+nx^2$ とおくと、 $x^2 = \frac{t-1}{n}$ より、

$$\frac{1}{t^k R} \left((2k-2) \left(1 + \frac{1+c^2}{n} + \frac{c^2}{n^2} \right) - (2k-3) \left(1 + \frac{2(1+c^2)}{n} + \frac{3c^2}{n^2} \right) t + (2k-4) \left(\frac{1+c^2}{n} + \frac{3c^2}{n^2} \right) t^2 - (2k-5) \frac{c^2}{n^2} t^3 \right) dx$$

となる。よって、積分すると、

$$\frac{xR}{(1+nx^2)^{k-1}} = (2k-2) \left(1 + \frac{1+c^2}{n} + \frac{c^2}{n^2} \right) \Pi^k - (2k-3) \left(1 + \frac{2(1+c^2)}{n} + \frac{3c^2}{n^2} \right) \Pi^{k-1} + (2k-4) \left(\frac{1+c^2}{n} + \frac{3c^2}{n^2} \right) \Pi^{k-2} - (2k-5) \frac{c^2}{n^2} \Pi^{k-3}$$

が得られる。これを繰り返し使うことにより、

$$\begin{aligned} \Pi^k &= (x \text{ の代数関数}) + \int_0^x \left(\frac{A}{1+nx^2} + B + Cx^2 \right) \frac{dx}{R} \\ &= (\sin^2 \varphi \text{ の代数関数}) + \int_0^\varphi \left(\frac{A}{1+n\sin^2 \varphi} + B + C\sin^2 \varphi \right) \frac{d\varphi}{\Delta} \end{aligned}$$

とかけることがわかる。以上より、 Q が多項式のときの結果も合わせて、

$$\int_0^\varphi \frac{Qd\varphi}{\Delta} = (\sin^2 \varphi \text{ の代数関数}) + \int_0^\varphi (A + B\sin^2 \varphi) \frac{d\varphi}{\Delta} + \sum_{N,n} \int_0^\varphi \frac{Nd\varphi}{(1+n\sin^2 \varphi)\Delta}$$

とかけることがわかる。ただし、 N, n は適当な値をとり、 $\sum$ は有限和である。

振り返り

以上の Step 1,2,3 により、どのようなことが可能になったか。まず変数変換により、

$$\frac{Pdx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}} \quad (P : x \text{ の有理関数})$$

を

$$\frac{Mdy}{\sqrt{\zeta + \eta y^2 + \theta y^4}} \quad (M : \text{偶幂のみからなる } y \text{ の有理関数})$$

に還元できることが Step 1 からわかった。そして $\zeta + \eta y^2 + \theta y^4$ の因子が実のとき、それを

$$\frac{Qd\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2 \varphi}} \quad (0 < c < 1, Q : \text{偶幂のみからなる } \sin \varphi \text{ の有理関数})$$

に変換できることが Step 2 からわかった．そして最後に Step 3 から，それを

$$\int_0^\varphi \frac{Qd\varphi}{\Delta} = (\sin^2 \varphi \text{ の代数関数}) + \int_0^\varphi (A + B \sin^2 \varphi) \frac{d\varphi}{\Delta} + \sum_{N,n} \int_0^\varphi \frac{Nd\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi)\Delta}$$

と分解できることがわかったわけである．ただし， $\Delta = \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}$ ．

7.2 楕円積分の定義

まず楕円積分という言葉の定義をしておこう．これに関しては，限定されたルジャンドルの定義よりも，後に定着することとなる定義を採用する．楕円積分とは，

$$\int_0^x \frac{Pdx}{\sqrt{Q(x)}} \quad (P : x \text{ の有理関数}, Q : x \text{ の } 3, 4 \text{ 次多項式})$$

という形の積分のことをいう．そうすると，今回の話の出発点であった $\frac{Pdx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}}$ は楕円積分の例であることになる．前章の主役だったレムニスケート積分もその例となる．ここから，ルジャンドルが第 1, 2, 3 種楕円積分をどのように定義したのか見ていく．

前節の結果により， $\frac{Pdx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}}$ の積分は，最終的に

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta} \quad \int_0^\varphi \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\Delta} \quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi)\Delta}$$

という 3 つの主要な要素に還元された．ちなみに，2 つ目に関しては，

$$\Delta d\varphi = \frac{\Delta^2 d\varphi}{\Delta} = (1 - c^2 \sin^2 \varphi) \frac{d\varphi}{\Delta}$$

と計算できるので，代わりに $\int_0^\varphi \Delta d\varphi$ を考えてもよい．ということで，ルジャンドルは，

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta} \quad \int_0^\varphi \Delta d\varphi \quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi)\Delta}$$

を左から，第一種楕円積分，第二種楕円積分，第三種楕円積分と呼ぶことにした．そして， $\Delta = \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}$ の中に現れる定数 c ($0 < c < 1$) は，その積分のモジュールと呼ばれる．これは，後のモジュラー方程式，モジュラー関数，モジュラー形式という用語におけるモジュラーという単語の原点である．

以上が Legendre 1825 の冒頭で語られていたことであった．ルジャンドルが敷いたこの設定を，アーベルとヤコビは踏襲していくこととなる．

第 8 章 アーベルによる新しい楕円積分論の始まり

アーベルは数多くのドラマをもっている．そこで，まずはアーベルの歩みを主要論文に沿って時系列順に追っていきこう．

■Abel 1826 「不可能の証明」[12] 4 次を超える代数方程式を解くことは一般には不可能であることを示した論文である．これについては代数方程式論について書くときに詳しく触れたい．

■Abel 1826「パリの論文」[13] これはリーマンによるアーベル関数論 (ヤコビの逆問題解決) において最も肝になる論文である。アーベルは、パリに留学した際、これを書いて提出したが、なんと当時ことごとく無視された。アーベルがまだ無名だったこともあるが、内容が一般的すぎたことも要因として大きい。ここでは「アーベル積分の加法定理」なるものが語られている。アーベル積分とは、なんと楕円積分における $\sqrt{Q(x)}$ の部分が一般の x の代数関数に拡張されたものである。これは 1841 年により出版されることとなる。

■Abel 1827「楕円関数研究」[14] アーベルによる楕円積分論の論文である。分量と完成度からして教科書といってもいいかもしれない。ルジャンドルの時点と比べて新しいこととして、アーベルは楕円積分の逆関数である楕円関数を中心に議論を展開した。また、ガウスによる「円の等分方程式の代数的可解性」を受けて、「楕円関数の等分方程式の代数的可解性」について論じた。

■Abel 1828「諸注意」[15] 正式名称は「ある種の超越関数の二、三の一般的性質に関する諸注意」であり、略して「諸注意」と呼ばれる。これは、なんと無視された「パリの論文」の一般性を下げた内容となっている。パリの論文では、アーベル積分について語られていたわけであるが、ここでは、一般性に関してアーベル積分と楕円積分の中間にあたる超楕円積分の加法定理について語られている。超楕円積分とは、

$$\int_0^x \frac{Pdx}{\sqrt{Q(x)}} \quad (P: x \text{ の有理関数}, Q: x \text{ の多項式})$$

という形の積分のことである。すなわち、楕円積分に比べて Q の次数の制限が取れたのである。

ということで、時系列で言えば、最初に取り組むべきは「パリの論文」ということになるが、内容の一般性で言えば、

「楕円関数研究」→「諸注意」→「パリの論文」

ということになる。これは扱う積分に関する

楕円積分 → 超楕円積分 → アーベル積分

という推移と対応している。

まずは楕円関数研究において楕円関数がどのように導入されるのか見ていこう。

Abel 1827「楕円関数研究」を読む：アーベルによる楕円関数の導入

ルジャンドルの第一種楕円積分は、

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi}}$$

という形をしていた。 $x = \sin \varphi$ と変換すると、これは

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2 x^2)}}$$

となる。ここでアーベルは、自身がこれから述べる諸公式がいっそう簡単になるように、より対象性が増す形

$$\alpha = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2 x^2)(1+e^2 x^2)}}$$

について考えていくと述べた。ここで $c, e > 0$ である。

そしてアーベルは、早速 $x = \varphi\alpha$ と、その逆関数を定義した。これは我々のいう意味で楕円関数である。まず簡単にわかることとして、

$$\varphi'\alpha = \frac{d(\varphi\alpha)}{d\alpha} = \frac{1}{\frac{d\alpha}{dx}} = \sqrt{(1 - c^2\varphi^2\alpha)(1 + e^2\varphi^2\alpha)}$$

であり、ここで

$$f\alpha = \sqrt{1 - c^2\varphi^2\alpha} \quad F\alpha = \sqrt{1 + e^2\varphi^2\alpha}$$

とおく。後に実感できることだが、この 2 つは、 $\sin$ のとっての $\cos$ のようなものだと思えばよい。つまり、 $f\alpha, F\alpha$ というのは、 $\varphi\alpha$ の平等な仲間である。すると、定義から、

$$\varphi'\alpha = f\alpha \cdot F\alpha$$

が得られる。また $f^2\alpha = 1 - c^2\varphi^2\alpha$ の両辺を α で微分することで、

$$2f\alpha \cdot f'\alpha = -2c^2\varphi\alpha \cdot \varphi'\alpha$$

$$f'\alpha = -c^2\varphi\alpha \cdot F\alpha$$

が得られる。同様に、

$$F'\alpha = e^2\varphi\alpha \cdot f\alpha$$

も得られる、このように、各々の微分が他の仲間で表すことができることも $\sin$ と $\cos$ の関係と似ている。

ここからは、次のテーマを考えていくこととなる。

関数 $x = \varphi\alpha$ は、どんな α に対して値をとれるか

つまり、この楕円関数の定義域を探っていこうということである。

まず楕円積分 $\alpha = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2)}}$ は、 $0 \leq x \leq \frac{1}{c}$ で正かつ単調増加である。 $x = \frac{1}{c}$ のときは広義積分となるわけだが、これは収束することがわかっている。このことから、

$$\frac{\omega}{2} = \int_0^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\sqrt{(1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2)}}$$

とおけば、その逆関数である $\varphi\alpha$ は $0 \leq \alpha \leq \frac{\omega}{2}$ で正かつ単調増加であることがわかる。これをもって、 $0 \leq \alpha \leq \frac{\omega}{2}$ では関数 $x = \varphi\alpha$ の値が確定したということになる。この範囲をどんどん広げていこうというわけである。ここから、 α が x の奇関数であることを踏まえると、 $\varphi\alpha$ も α の奇関数ということになるので、 $\varphi(-\alpha) = -\varphi\alpha$ となり、これによって、 $-\frac{\omega}{2} \leq \alpha \leq \frac{\omega}{2}$ に定義域を広げられたこととなる。

次にアーベルは、 $\alpha = \int_0^{xi} \frac{dx}{\sqrt{(1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2)}}$ の解釈を試みる。 $y = xi$ という変数変換を想定すれば、

$$\int_0^{xi} \frac{dx}{\sqrt{(1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2)}} = i \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1 - e^2y^2)(1 + c^2y^2)}}$$

思うことができる。ここで、 $\beta = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1 - e^2y^2)(1 + c^2y^2)}}$ とおけば、これは $0 \leq y \leq \frac{1}{e}$ で正かつ単調増加。よって、

$$\frac{\tilde{\omega}}{2} = \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dy}{\sqrt{(1 - e^2y^2)(1 + c^2y^2)}}$$

とおけば、 y は $0 \leq \beta \leq \frac{\tilde{\omega}}{2}$ で正かつ単調増加ということになる。そして今回も、 β が y の奇関数であるため、 y も β の奇関数であり、定義域を $-\frac{\tilde{\omega}}{2} \leq \beta \leq \frac{\tilde{\omega}}{2}$ に広げることができる。

よって今のところ、

$$-\frac{\omega}{2} \leq \alpha \leq \frac{\omega}{2} \quad \alpha = \beta i \quad \left(-\frac{\tilde{\omega}}{2} \leq \beta \leq \frac{\tilde{\omega}}{2}\right)$$

において、 $\varphi\alpha$ は定まっている。ここから α の範囲を複素数全体に広げるためにはどうしたらよいだろうか。

楕円関数の加法定理

ここでアーベルは $\varphi\alpha$ の加法定理を提示する：

定理. 次が成り立つ：

$$\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\varphi\alpha \cdot f\beta \cdot F\beta + \varphi\beta \cdot f\alpha \cdot F\alpha}{1 + e^2 c^2 \varphi^2 \alpha \cdot \varphi^2 \beta}$$

アーベルは「これは既存の諸性質からただちに導き出すことができる」という。それはどういうことだろうか。以前、我々はオイラーの結果から、レムニスケート関数の加法定理を導出した。一方、オイラーは、そこで使用された結果よりも、さらに一般的な結果を述べていて、それは今回の積分の形に対するものであった。再掲する。

c, e をあらかじめ定数としてとっておく。微分式

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-c^2y^2)(1+e^2y^2)}}$$

は、代数的完全微分積分

$$0 = t^2 - x^2 - y^2 - c^2 e^2 t^2 x^2 y^2 + 2xy \sqrt{(1-c^2 t^2)(1+e^2 t^2)} \quad (t : \text{定数})$$

をもつ。

最後の式は、 x について整理すると、

$$(1 + c^2 e^2 t^2 y^2) x^2 - 2y \sqrt{(1-c^2 t^2)(1+e^2 t^2)} x + y^2 - t^2 = 0$$

となり、これを x の 2 次方程式として解くと、

$$x = \frac{y \sqrt{(1-c^2 t^2)(1+e^2 t^2)} + t \sqrt{(1-c^2 y^2)(1+e^2 y^2)}}{1 + c^2 e^2 y^2 t^2}$$

となる。

よって、レムニスケート関数の加法定理を導出したときと同様に、

$$x = \varphi(\alpha + \beta), \quad y = \varphi\alpha, \quad t = \varphi\beta$$

とおくことで、

$$\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\varphi\alpha \sqrt{(1-c^2 \varphi^2 \beta)(1+e^2 \varphi^2 \beta)} + \varphi\beta \sqrt{(1-c^2 \varphi^2 \alpha)(1+e^2 \varphi^2 \alpha)}}{1 + c^2 e^2 \varphi^2 \alpha \cdot \varphi^2 \beta}$$

が得られ、 $f\alpha, F\alpha$ の定義から、

$$\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\varphi\alpha \cdot f\beta \cdot F\beta + \varphi\beta \cdot f\alpha \cdot F\alpha}{1 + e^2 c^2 \varphi^2 \alpha \cdot \varphi^2 \beta}$$

が得られる。以上により、 $\varphi\alpha$ の加法定理が得られた。

一方、アーベルは、この既存の証明に対して、新しい証明を提示した。それを見てみよう。加法定理の等式の右辺を r とすると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \alpha} &= \dots\dots\dots \\ &= \frac{(1 - c^2 e^2 \varphi^2 \alpha \cdot \varphi^2 \beta) ((e^2 - c^2) \varphi\alpha \cdot \varphi\beta + f\alpha \cdot f\beta \cdot F\alpha \cdot F\beta) - 2c^2 e^2 \varphi\alpha \cdot \varphi\beta (\varphi^2 \alpha + \varphi^2 \beta)}{(1 + c^2 e^2 \varphi^2 \alpha \cdot \varphi^2 \beta)} \end{aligned}$$

と計算することができる。よく見てみると、これは α と β に関して対称式になっている。よって、 r 自体も α と β に関する対称式であることから、

$$\frac{\partial r}{\partial \alpha} = \frac{\partial r}{\partial \beta}$$

がいえる。ここから、 r は $(\alpha + \beta)$ の関数であることがわかる。どうということかという、 $u = \alpha + \beta, v = \alpha - \beta$ とおいたとき、

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial v} &= \frac{\partial r}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial v} + \frac{\partial r}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial v} \\ &= \frac{\partial r}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

となるため、 r は v には依らず、 $u = \alpha + \beta$ にのみ依存するということである。

このとき、 $\beta = 0$ 、すなわち $u = \alpha + 0$ とすれば、 $\varphi 0 = 0, f0 = 1, F0 = 1$ より、 r の定義から、

$$r|_{u=\alpha+0} = \varphi\alpha = \varphi u$$

がいえる。よって、 $r = \varphi(\alpha + \beta)$ がいえたことになる。

同様の証明法により、 $f\alpha, F\alpha$ の加法定理

$$\begin{aligned} f(\alpha + \beta) &= \frac{f\alpha \cdot f\beta - \varphi\alpha \cdot \varphi\beta \cdot F\alpha \cdot F\beta}{1 + e^2 c^2 \varphi^2 \alpha \cdot \varphi^2 \beta} \\ F(\alpha + \beta) &= \frac{F\alpha \cdot F\beta - \varphi\alpha \cdot \varphi\beta \cdot f\alpha \cdot f\beta}{1 + e^2 c^2 \varphi^2 \alpha \cdot \varphi^2 \beta} \end{aligned}$$

も導くことができる。

では定義域の拡張に話を戻そう。思い返してみれば、今の時点で確定している

$$-\frac{\omega}{2} \leq \alpha \leq \frac{\omega}{2} \quad \alpha = \beta i \quad \left(-\frac{\tilde{\omega}}{2} \leq \beta \leq \frac{\tilde{\omega}}{2}\right)$$

を自由に足し算することにより、任意の複素数は表せる。よって、今得られた加法定理を用いることにより、任意の複素数における $\varphi\alpha$ の値を計算することが可能になるのである。以上によって、 $\varphi\alpha$ の定義域を任意の複素数にまで拡張することができた。

楕円関数の 2 重周期性

現代において、楕円関数の定義は「 $\mathbb{C}$ 上 2 重周期関数」である。しかし、我々にとって、楕円関数とは楕円積分の逆関数であるため、その 2 重周期性とは示すべき性質ということになる。そして、実際にアーベルはそれを確かめている。それを見てみよう。

まず定義から、

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) &= \frac{1}{c^2} & f\left(\frac{\omega}{2}\right) &= 0 & F\left(\frac{\omega}{2}\right) &= \frac{\sqrt{c^2+e^2}}{c} \\ \varphi\left(\frac{\tilde{\omega}}{2}i\right) &= \frac{1}{e^2} & f\left(\frac{\tilde{\omega}}{2}i\right) &= \frac{\sqrt{c^2+e^2}}{e} & F\left(\frac{\tilde{\omega}}{2}i\right) &= 0\end{aligned}$$

がわかる。これらを用いることで、加法定理から、

$$\varphi\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right) = \frac{0 + \frac{1}{c^2}f\alpha \cdot F\alpha}{1 + c^2e^2\varphi^2\alpha \cdot \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{f\alpha}{F\alpha}$$

同様に、

$$\begin{aligned}f\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right) &= -c\sqrt{c^2+e^2} \cdot \frac{\varphi\alpha}{F\alpha} \\ F\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right) &= \frac{\sqrt{c^2+e^2}}{c} \cdot \frac{1}{F\alpha}\end{aligned}$$

がいえる。よって、この 3 つを用いることで、

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha + \omega) &= \varphi\left(\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right) + \frac{\omega}{2}\right) \\ &= \frac{1}{c^2} \cdot \frac{f\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right)}{F\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right)} \\ &= -\varphi\alpha\end{aligned}$$

と計算することができる。よって、

$$\varphi(\alpha + 2\omega) = -\varphi(\alpha + \omega) = \varphi\alpha$$

がいえた。同様に、

$$\varphi\left(\alpha \pm \frac{\omega}{2}\right) = \varphi\alpha \quad \varphi\left(\alpha \pm \frac{\tilde{\omega}}{2}i\right) = \varphi\alpha$$

まで示することができるため、 $\varphi\alpha$ の 2 重周期性が確かめられたことになる。 $f\alpha, F\alpha$ が同じ周期性をもつことも、同じように確かめることができる。

第 9 章 Abel 1828 「諸注意」を読む：超楕円積分の加法定理

ここでは Abel 1828 「諸注意」で語られる超楕円積分論を観察する。この「諸注意」によって刺激を受けたヤコビが立てた問題というのが「ヤコビの逆問題」であり、そういった意味でもこれは注目に値する。

まずアーベル以前から定着していた楕円積分の加法定理について振り返ると、それは

$$\int_0^x \frac{Pdx}{\sqrt{Q(x)}} \quad (P: x \text{ の有理関数}, Q: x \text{ の } 3, 4 \text{ 次多項式})$$

という積分について、

$$\int_0^x \frac{Pdx}{\sqrt{Q(x)}} = \int_0^y \frac{Pdy}{\sqrt{Q(y)}} + \int_0^t \frac{Pdt}{\sqrt{Q(t)}}$$

という x, y, t の関係式が代数関係式として求まるというものだった。具体的に $Q(x) = (1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2)$ のとき、その関係式が、

$$0 = t^2 - x^2 - y^2 - c^2e^2t^2x^2y^2 + 2xy\sqrt{(1 - c^2t^2)(1 + e^2t^2)}$$

となることを上で見た。言い換えると、 y, t に対して、

$$\int_0^y \frac{Pdy}{\sqrt{Q(y)}} + \int_0^t \frac{Pdt}{\sqrt{Q(t)}} = \int_0^x \frac{Pdx}{\sqrt{Q(x)}}$$

となるような x は、代数方程式

$$0 = t^2 - x^2 - y^2 - c^2e^2t^2x^2y^2 + 2xy\sqrt{(1 - c^2t^2)(1 + e^2t^2)}$$

の根として求めることができるということである。つまり、同じ形の積分の 2 つの和を、同じ形の積分で表すことができ、そのときの x は代数的に求めることができるという主張である。実は、これは $Q(x)$ の次数が 5 を越えるとき、一般にはできない。しかし、ただ「できない」ということで終わるのではなく、主張の形自体を拡張してしまったのがアーベルの「諸注意」における結果である。

「諸注意」の中で最初にアーベルが設定した積分は、

$$\psi x = \int_0^x \frac{fx dx}{(x - \alpha)\sqrt{\varphi x}} \quad (fx, \varphi x: x \text{ の多項式})$$

という形のものである。今までの話から、数 $x_1, \dots, x_\mu$ に対して、積分の和

$$\varepsilon_1\psi x_1 + \varepsilon_2\psi x_2 + \dots + \varepsilon_\mu\psi x_\mu \quad (\varepsilon_i = \pm 1)$$

について何か言えれば、それは嬉しいことである。その積分の和の値は、当然 $x_1, \dots, x_\mu$ に依存する。アーベルは、その $x_1, \dots, x_\mu$ を、とある代数方程式 $F(x) = 0$ のすべての解とすると、その積分の和がなんと $F(x)$ の係数の情報から明示的に表示できることを明らかにした。それが「諸注意」の定理 I である。

定理 (I). $\varphi x = \varphi_1x \cdot \varphi_2x$ と 2 つの多項式に分解されているとする。

$$\begin{cases} \theta x = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \\ \theta_1x = c_0 + c_1x + \dots + c_mx^m \end{cases}$$

と 2 つの多項式をとり、 $x_0, \dots, x_\mu$ を代数方程式

$$Fx := (\theta x)^2\varphi_1x - (\theta_1x)^2\varphi_2x = 0 \quad (\text{重根をもたないと仮定する})$$

のすべての根としたとき、

$$\begin{aligned} & \varepsilon_1\psi x_1 + \varepsilon_2\psi x_2 + \dots + \varepsilon_\mu\psi x_\mu \\ &= -\frac{f\alpha}{\sqrt{\varphi\alpha}} \log \frac{\theta\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha} + \theta_1\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}}{\theta\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha} - \theta_1\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}} + r + C \end{aligned}$$

と表せる。ただし、 C は定数で、 r は関数

$$\frac{ft}{(t-\alpha)\sqrt{\varphi t}} \log \frac{\theta t\sqrt{\varphi_1 t} + \theta_1 t\sqrt{\varphi_2 t}}{\theta t\sqrt{\varphi_1 t} - \theta_1 t\sqrt{\varphi_2 t}}$$

を $\frac{1}{t}$ で冪級数展開したときの $\frac{1}{t}$ の係数である。また、各 ε_i が 1 か -1 のどちらなのかは x_i に依存する。

今からこのアーベルによる証明を見ていく。

9.1 定理 I の証明

δ とは

アーベルの用いる δ というものは現代ではなじみのないものなので、まずは簡単な場合について練習しておく。 $f(x, a)$ という 2 変数関数が与えられているとし、 $f(x, a) = 0$ が常に成り立っていると仮定する。この両辺を微分すると、

$$d(f(x, a)) = 0$$

と書かれることになるが、今回微分されているものは多変数関数なので、左辺の意味することはいわゆる完全微分になる。よって、

$$\frac{\partial f(x, a)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, a)}{\partial a} da = 0$$

となる。これをアーベルは、

$$F'x dx + \delta Fx = 0$$

と書く。一つ目の項については、 x による微分 (導関数) を $F'x$ と書いているということで標準的である一方で、 δFx は見慣れない。アーベルは δFx を「量 a に関する $f(x, a)$ の微分」と説明する。すなわち、完全微分の項のうちの a に関するものとして、 $\frac{\partial f(x, a)}{\partial a} da$ を δFx と表しているのである。

変数が増えた場合も同様の表記を用いる。つまり、 $f(x, a_1, \dots, a_n)$ を考えた場合も、

$$d(f(x, a_1, \dots, a_n)) = 0$$

は、

$$F'x dx + \delta Fx = 0$$

と書くことになる。このとき δFx は「量 $a_1, \dots, a_n$ に関する $f(x, a_1, \dots, a_n)$ の微分」を表し、正確には、 $\frac{\partial f(x, a_1, \dots, a_n)}{\partial a_1} da_1 + \dots + \frac{\partial f(x, a_1, \dots, a_n)}{\partial a_n} da_n$ のことを指すというわけである。

dx から δ へ

では、定理 I の証明を始めていこう。設定を振り返ると、 $x_1, \dots, x_\mu$ は、代数方程式

$$Fx = (\theta x)^2 \varphi_1 x - (\theta_1 x)^2 \varphi_2 x = 0$$

の根であった。そして、ここに現れている多項式 $\theta x \cdot \theta_1 x$ の係数は、それぞれ a_i, c_j で定義されている。ここで、 $x_1, \dots, x_\mu$ のうちのひとつ x_l に注目し、 $Fx_l = 0$ を保ったまま、 a_i, c_j を動かすことを考える。すなわち、 x_l は $Fx = 0$ の根であり続けなければならないので、 a_i や c_j が動くともに動かなくてはならない。

今の状況において、 Fx_l は $x_l, a_0, \dots, a_n, c_0, \dots, c_m$ を変数とする多変数関数である。このとき、仮定された $Fx_l = 0$ から、その微分

$$F'x_l dx_l + \delta Fx_l = 0$$

が得られる。このとき、 $\delta F x_l$ は「量 a_i, c_j に関する $F x_l$ の微分」である。ここで、 $F x$ の定義を踏まえれば、 $\varphi_1 x_l, \varphi_2 x_l$ は a_i, c_j に依存しないので、

$$\delta F x_l = 2\theta x_l \cdot \varphi_1 x_l \cdot \delta \theta x_l - 2\theta_1 x_l \cdot \varphi_2 x_l \cdot \theta_1 x_l$$

と計算できる。よって、

$$\begin{aligned} F' x_l dx_l &= -\delta F x_l \\ &= 2\theta_1 x_l \cdot \varphi_2 x_l \cdot \theta_1 x_l - 2\theta x_l \cdot \varphi_1 x_l \cdot \delta \theta x_l \end{aligned}$$

ということになる。ところで、 $F x_l = (\theta x_l)^2 \varphi_1 x_l - (\theta_1 x_l)^2 \varphi_2 x_l = 0$ より、

$$\theta x_l \sqrt{\varphi_1 x_l} = \varepsilon_l \theta_1 x_l \sqrt{\varphi_2 x_l} \quad (\varepsilon_l = \pm 1)$$

とできる。これより、

$$\begin{aligned} \theta x_l \cdot \varphi_1 x_l &= \varepsilon_l \theta_1 x_l \sqrt{\varphi_1 x_l \cdot \varphi_2 x_l} = \varepsilon_l \theta_1 x_l \sqrt{\varphi x_l} \\ \theta_1 x_l \cdot \varphi_2 x_l &= \varepsilon_l \theta x_l \sqrt{\varphi_2 x_l \cdot \varphi_1 x_l} = \varepsilon_l \theta x_l \sqrt{\varphi x_l} \end{aligned}$$

となるため、

$$F' x_l dx_l = 2\varepsilon_l (\theta x_l \cdot \delta \theta_1 x_l - \theta_1 x_l \cdot \delta \theta x_l) \sqrt{\varphi x_l}$$

とさらに計算を進めることができる。この両辺に $\varepsilon_l \frac{f x_l}{F' x_l \cdot (x_l - \alpha) \sqrt{\varphi x_l}}$ を掛けると、

$$\varepsilon_l \frac{f x_l dx_l}{(x_l - \alpha) \sqrt{\varphi x_l}} = \frac{2f x_l (\theta x_l \cdot \delta \theta_1 x_l - \theta_1 x_l \cdot \delta \theta x_l)}{(x_l - \alpha) F' x_l}$$

となり、 $\lambda x_l = 2f x_l (\theta x_l \cdot \delta \theta_1 x_l - \theta_1 x_l \cdot \delta \theta x_l)$ とおくと、最終的に、

$$\varepsilon_l \frac{f x_l dx_l}{(x_l - \alpha) \sqrt{\varphi x_l}} = \frac{\lambda x_l}{(x_l - \alpha) F' x_l}$$

が得られる。これを Γx_l とおく。この左辺に $\int_0^{x_l}$ をつけると、それはまさしく $\varepsilon_l \psi x_l$ であり、今回の主役である。ここで注意すべきこととして、左辺における無限小量である dx に当たるものが右辺のどこに現れているのかといえば、それは λx_l の定義内にある $\delta \theta x_l$ と $\delta \theta_1 x_l$ に現れる。 δ の定義を振り返れば、それらが実際には da_i, dc_j の線型和であることがわかる。したがって、ここで得た等式によって、 $\varepsilon_l \psi x_l$ を、点 x_l の変化ではなく、係数 a_i, c_j の変化についての積分に変換できるようになったのである。

δv の計算

Γx_l の積分の総和について我々は考えていた。そこで、

$$\delta v := \sum_{l=1}^{\mu} \Gamma x_l = \sum_{l=1}^{\mu} \frac{\lambda x_l}{(x_l - \alpha) F' x_l}$$

について考えていくことになる。以降、簡略化のため、基本的には添え字 l を省略して、

$$\delta v = \sum \frac{\lambda x}{(x - \alpha) F' x}$$

のように書く。

ここで、 $\lambda_1 x = \frac{\lambda x - \lambda \alpha}{x - \alpha}$ とおくことで、

$$\lambda x = (x - \alpha)\lambda_1 x + \lambda \alpha$$

と書くことにすると、

$$\delta v = \sum \frac{\lambda_1 x}{F'x} + \lambda \alpha \sum \frac{1}{(x - \alpha)F'x}$$

となる．ここで 2 つ目の項は x_l たちに依らないことが簡単にわかる．実際、前に説明した部分分数分解の話から、今回、多項式 Fx は重根を持たないので、適当な変化量 t をとると、

$$\frac{1}{Ft} = \sum_{l=1}^{\mu} \frac{c_l}{t - x_l}$$

と表せる．ただしこのとき、 c_k は、

$$\begin{aligned} c_k &= \lim_{t \rightarrow x_k} \sum_{l=1}^{\mu} \frac{c_l(t - x_k)}{t - x_l} \\ &= \lim_{t \rightarrow x_k} \frac{t - x_k}{Ft} \\ &= \lim_{t \rightarrow x_k} \frac{t - x_k}{Ft - Fx_k} \\ &= \frac{1}{F'x_k} \end{aligned}$$

と求められるため、最終的に

$$\frac{1}{Ft} = \sum_{l=1}^{\mu} \frac{1}{(t - x_l)F'x_l}$$

-1 倍し、 $t = \alpha$ と代入し、添え字を省いて書けば、

$$-\frac{1}{F\alpha} = \sum \frac{1}{(x - \alpha)F'x}$$

が得られる．よって、考えていた総和に戻ると、

$$\delta v = -\frac{\lambda \alpha}{F\alpha} + \sum \frac{\lambda_1 x}{F'x}$$

ということになる．

$\sum \frac{\lambda_1 x}{F'x}$ の解釈

次に $\delta v = -\frac{\lambda \alpha}{F\alpha} + \sum \frac{\lambda_1 x}{F'x}$ の二つ目の項である $\sum \frac{\lambda_1 x}{F'x}$ について考えていく．ここでも適当な変化量 t をとっておく．まず良く知られた等比級数の公式

$$\frac{1}{t - x} = \frac{\frac{1}{t}}{1 - \frac{x}{t}} = t^{-1} + xt^{-2} + x^2t^{-3} + \dots$$

により、前得た公式から、

$$\begin{aligned} \frac{1}{Ft} &= \sum \frac{1}{(t - x)F'x} \\ &= \left(\sum \frac{1}{F'x} \right) t^{-1} + \left(\sum \frac{x}{F'x} \right) t^{-2} + \left(\sum \frac{x^2}{F'x} \right) t^{-3} + \dots \end{aligned}$$

が得られる．よって， $\sum \frac{x^k}{F'x}$ は， $\frac{1}{Ft}$ の t^{-1} での級数展開における t^{-k-1} の係数であることがわかる．これにより， $\sum \frac{\lambda_1 x}{F'x}$ は， $\frac{\lambda_1 t}{Ft}$ の t^{-1} での級数展開における t^{-1} の係数であることが容易にわかる（実際に $\lambda_1 t = b_0 + \cdots b_d t^d$ と係数をおいて確かめてみよ）．

一般に関数 ft の t^{-1} での級数展開における t^{-1} の係数を Πft とおくことにする．そうすると，先ほどの結果は，

$$\sum \frac{\lambda_1 x}{F'x} = \Pi \frac{\lambda_1 t}{Ft}$$

と書かれることとなる．ここで $\lambda_1 t$ を定義した式 $\lambda t = (t - \alpha)\lambda_1 t + \lambda\alpha$ を思い出そう．この両辺を $(t - \alpha)Ft$ で割ると，

$$\frac{\lambda t}{(t - \alpha)Ft} = \frac{\lambda_1 t}{Ft} + \frac{\lambda\alpha}{(t - \alpha)Ft}$$

となる．このとき関数 $\frac{\lambda\alpha}{(t - \alpha)Ft}$ の分子は定数で，分母の次数は 1 以上なことから， $\Pi \frac{\lambda\alpha}{(t - \alpha)Ft} = 0$ がいえる．よって，

$$\sum \frac{\lambda_1 x}{F'x} = \Pi \frac{\lambda_1 t}{Ft} = \Pi \frac{\lambda t}{(t - \alpha)Ft}$$

が導ける．

仕上げ

先ほどの結果から，

$$\delta v = -\frac{\lambda\alpha}{F\alpha} + \Pi \frac{\lambda t}{(t - \alpha)Ft}$$

というところまで計算を進めることができた．ここで $\lambda x, Fx$ をその定義に置き換えると，

$$\delta v = -2f\alpha \cdot \frac{\theta\alpha \cdot \delta(\theta_1\alpha) - \theta_1\alpha \cdot \delta(\theta\alpha)}{(\theta\alpha)^2\varphi_1\alpha - (\theta_1\alpha)^2\varphi_2\alpha} + \Pi \frac{2ft}{t - \alpha} \cdot \frac{\theta t \cdot \delta(\theta_1 t) - \theta_1 t \cdot \delta(\theta t)}{(\theta t)^2\varphi_1 t - (\theta_1 t)^2\varphi_2 t}$$

が得られる．

思い返せば，定理 I の主題であった $\varepsilon_1\psi x_1 + \varepsilon_2\psi x_2 + \cdots + \varepsilon_\mu\psi x_\mu$ は， δv を積分したものだった．そこで，この得られた等式の右辺はどのように積分されるだろうか．それは，以下 3 つの事実を用いることにより，明らかになる：

- 公式

$$\int \frac{pdq - qdp}{p^2m - q^2n} = \frac{1}{2\sqrt{mn}} \log \frac{p\sqrt{m} + q\sqrt{n}}{p\sqrt{m} - q\sqrt{n}}$$

- その公式は， d の代わりに δ であった場合にも使える
- Π と積分は交換可能である

実際に， $\frac{\theta\alpha \cdot \delta(\theta_1\alpha) - \theta_1\alpha \cdot \delta(\theta\alpha)}{(\theta\alpha)^2\varphi_1\alpha - (\theta_1\alpha)^2\varphi_2\alpha}$ と $\frac{\theta t \cdot \delta(\theta_1 t) - \theta_1 t \cdot \delta(\theta t)}{(\theta t)^2\varphi_1 t - (\theta_1 t)^2\varphi_2 t}$ は公式の形に当てはまるため，これら 3 つを用いることで， δv の積分は，

$$v = C - \frac{f\alpha}{\sqrt{\varphi\alpha}} \log \frac{\theta\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha} + \theta_1\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}}{\theta\alpha\sqrt{\varphi_1\alpha} - \theta_1\alpha\sqrt{\varphi_2\alpha}} + \Pi \frac{ft}{(t - \alpha)\sqrt{\varphi t}} \log \frac{\theta t\sqrt{\varphi_1 t} + \theta_1 t\sqrt{\varphi_2 t}}{\theta t\sqrt{\varphi_1 t} - \theta_1 t\sqrt{\varphi_2 t}}$$

となる．ただし， C は積分定数である．以上より，定理 I を証明することができた．

9.2 定理 I の振り返り：代数方程式論の視点

この定理 I の設定を振り返ると、主役はあくまで $\psi x = \int_0^x \frac{f(x)dx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}}$ という積分だが、その上で暴れまわるのは、 $x_1, \dots, x_\mu$ という点たち、そしてそれに紐づいた a_i, c_j という量である。振り返ると、 a_i, c_j はそれぞれ多項式 $\theta x, \theta_1 x$ の係数であり、

$$Fx = (\theta x)^2 \varphi_1 x - (\theta_1 x)^2 \varphi_2 x = 0$$

の根を $x_1, \dots, x_\mu$ としたのだった。

根に関する何かしらのものを、元の方程式の係数で制御しようというのは代数方程式論の主題である。「方程式を代数的に解こう」というのも、根を係数で表示しようとすることであり、根に関する対称式を係数で表す「解と係数の関係」なんかもそうだ。今回の定理もその一環だと思うと、少しは気持ちがわかりやすくなるかもしれない。つまり、解 $x_1, \dots, x_\mu$ たちからつくられる $\varepsilon_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 \psi x_2 + \dots + \varepsilon_\mu \psi x_\mu$ という量、これを元の方程式の係数に関する情報 a_i, c_j の代数関数として表現できてしまったのである。これはすごいことではないか。

9.3 定理 I に続く系たち

定理 I の結果の特殊な場合を考えることにより、様々な系が得られる。それらを紹介する。以降、表記を簡単にするため、 $\chi x = \frac{\theta x \sqrt{\varphi_1 x} + \theta_1 x \sqrt{\varphi_2 x}}{\theta x \sqrt{\varphi_1 x} - \theta_1 x \sqrt{\varphi_2 x}}$ とする。

■定理 II を見る。定理 I では、 Fx は重根を持たないと仮定されていた。それは $x_1, \dots, x_\mu$ がすべて相異なるということである。この仮定があったからこそ、議論の途中で頻繁に現れた $\frac{1}{F'x_i}$ を扱うことができた。しかし、その一方、定理 I の証明の後にアーベルは次のように言う：

… それにもかかわらず、式 (25) が量 $x_1, \dots, x_\mu$ のいくつかが互いに等しい場合にもなお成立するのは明らかである。

(式 (25) とは、定理 I の結論の等式のことである。)

厳密な説明はなされないわけだが、これは事実であり、我々が観察できることとしても、定理 I の結論に $\frac{1}{F'x}$ は現れていないし、連続性の観点から考えて、 $x_1 = x_2$ のときのみ結果が突発的に変化するのは考えにくい。ということで、このことは認めることにしよう。

特に、 $x_1 = x_2$ のとき、

$$\theta x_1 \sqrt{\varphi_1 x_1} = \varepsilon_1 \theta_1 x_1 \sqrt{\varphi_2 x_1} \quad \theta x_2 \sqrt{\varphi_1 x_2} = \varepsilon_2 \theta_1 x_2 \sqrt{\varphi_2 x_2}$$

より、

$$\varepsilon_1 = \frac{\theta x_1 \sqrt{\varphi_1 x_1}}{\theta_1 x_1 \sqrt{\varphi_2 x_1}} = \varepsilon_2$$

がいえる。ただし、分母が 0 でないことを除かなくてはならない。そのためには $\theta x_1 \cdot \varphi_2 x_1 \neq 0$ であればよい。 x_1 が

$$Fx = (\theta x)^2 \varphi_1 x - (\theta_1 x)^2 \varphi_2 x = 0$$

の根であることを踏まえれば、 $\theta x \cdot \varphi_1 x$ と $\theta_1 x \cdot \varphi_2 x$ が共通因子をもたないと仮定すると、 $\theta x_1 \cdot \varphi_2 x_1 = 0$ ならば $\theta x_1 \cdot \varphi_1 x_1 = 0$ とならざるを得ず、結果的に $x - x_1$ という共通因子をもつことになってしまうため、 $\theta x_1 \cdot \varphi_2 x_1 \neq 0$ がいえる。すなわち、 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ となる。以上より、

定理 (II). $\theta x \cdot \varphi_1 x$ と $\theta_1 x \cdot \varphi_2 x$ が共通因子をもたないとき,

$$(\theta x)^2 \varphi_1 x - (\theta_1 x)^2 \varphi_2 x = A(x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_\mu)^{m_\mu}$$

ならば,

$$\varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \cdots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu = C - \frac{f\alpha}{\sqrt{\varphi\alpha}} \log \chi\alpha + \Pi \frac{ft}{(t-\alpha)\sqrt{\varphi t}} \log \chi t$$

が成り立つ.

■**定理 III を見る.** 次に, fx が $x - \alpha$ で割り切れるときを考える. すなわち, $f\alpha = (x - \alpha)gx$ と書ける場合を考える. このとき, 当然 $f\alpha = 0$ であるため, 以下の定理が導ける:

定理 (III). $\psi x = \int_0^x \frac{gxdx}{\sqrt{\varphi x}}$ とすると, 定理 II と同じ状況の下で,

$$\varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \cdots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu = C + \Pi \frac{gt}{\sqrt{\varphi t}} \log \chi t$$

が成り立つ.

■**定理 IV を見る.** 定理 II の状況に戻り, 今度は fx の次数が φx の次数の半分より小さいと仮定してみる. するとこのとき, 実は

$$\Pi \frac{ft}{(t-\alpha)\sqrt{\varphi t}} \log \chi t = 0$$

となる. 実際, 左辺を求めるためには,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \cdot \frac{ft}{(t-\alpha)\sqrt{\varphi t}} \log \chi t$$

を計算すればよいが, $\log$ 部分は定数に収束するため, 次数を換算すれば, 0 に収束することがわかる. したがって,

定理 (IV). fx の次数が φx の次数の半分より小さいとすると, 定理 II と同じ状況下で,

$$\varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \cdots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu = C - \frac{f\alpha}{\sqrt{\varphi\alpha}} \log \chi\alpha$$

が成り立つ.

■**定理 V を見る.** ここで定理 II において, 定数 α を変数 s に置き換えてみる. まず, 良く知られているように,

$$\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \left(\frac{1}{x-s} \right) = \frac{(k-1)!}{(x-s)^k}$$

である. よって, 定理 II の結果である

$$\varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \cdots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu = C - \frac{fs}{\sqrt{\varphi s}} \log \chi s + \Pi \frac{ft}{(t-\alpha)\sqrt{\varphi t}} \log \chi t$$

の両辺を s で微分することで、 $\psi_k x = \int_0^x \frac{f x dx}{(x-s)^k \sqrt{\varphi x}}$ について、

$$\begin{aligned} & (k-1)! (\varepsilon_1 m_1 \psi_k x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi_k x_2 + \cdots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi_k x_\mu) \\ &= -\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \left(\frac{fs}{\sqrt{\varphi s}} \log \chi s \right) + (k-1)! \cdot \Pi \frac{ft}{(t-\alpha)^k \sqrt{\varphi t}} \log \chi t \end{aligned}$$

が得られる。ただし、 $\psi_k x = \int_0^x \frac{f x dx}{(x-s)^k \sqrt{\varphi x}}$ であり、また Π と s での微分が交換可能であることを用いている。ここで $s = \alpha$ と定数 α に固定することで、以下が得られる：

定理 (V). $\psi x = \int_0^x \frac{f x dx}{(x-\alpha)^k \sqrt{\varphi x}}$ とすると、定理 II と同じ状況の下で、

$$\varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \cdots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu = -\frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \left(\frac{fs}{\sqrt{\varphi s}} \log \chi s \right) \Big|_{s=\alpha} + \Pi \frac{ft}{(t-\alpha)^k \sqrt{\varphi t}} \log \chi t$$

が成り立つ。

これは本文の定理 V を多少修正したものになっている。

■**定理 VI を見る。** 定理 II の状況の上で、定理 III で加えた条件は、 $fx = (x-\alpha)gx$ というものだった。ここにさらに定理 IV の条件も加えると、 fx の次数が φx の次数の半分より小さいということになる。その中で、 fx の次数が最大の場合を考えれば、そのとき gx の次数は、

$$\varphi x \text{ の次数 } \nu \text{ が偶数ならば、} \frac{\nu}{2} - 2, \text{ 奇数ならば、} \frac{\nu-1}{2} - 1$$

ということになる。このとき、定理 III と定理 IV で起こったことが同時に起こるので、結果の等式の右辺には定数 C のみが残る。よって、

定理 (VI). $\psi x = \int_0^x \frac{(\delta_0 + \delta_1 x + \cdots + \delta_{\nu'} x^{\nu'}) dx}{\sqrt{\beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_\nu x^\nu}}$ とする。ただし、 ν が偶数ならば $\nu' = \frac{\nu}{2} - 2$ であり、 ν が奇数ならば $\nu' = \frac{\nu-1}{2} - 1$ である。このとき、定理 II と同じ状況下で、

$$\varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \cdots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu = \text{定数}$$

が成り立つ。

■**定理 VII を見る。** ここで x の有理関数 r をとり、より一般的な形 $\psi x = \int_0^x \frac{r dx}{\sqrt{\varphi x}}$ について考える。有理関数の部分分数分解から、

$$r = fx + \frac{f_1 x}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \cdots + \frac{f_\omega x}{(x-\alpha_\omega)^{k_\omega}}$$

とできるため、 $\int_0^x \frac{f x dx}{\sqrt{\varphi x}}$ については定理 III、 $\int_0^x \frac{f_i x dx}{(x-\alpha_i)^{k_i} \sqrt{\varphi x}}$ については定理 V を使うことにより、以下が得られる：

定理 (VII). $\psi x = \int_0^x \frac{r dx}{\sqrt{\varphi x}}$ とすると、定理 II と同じ状況の下で、

$$\begin{aligned} & \varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \cdots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu \\ &= C + \Pi \frac{r}{\sqrt{\varphi t}} \log \chi t - \sum_{i=1}^{\omega} \frac{1}{(k_i-1)!} \cdot \frac{d^{k_i-1}}{ds^{k_i-1}} \left(\frac{f_i s}{\sqrt{\varphi s}} \log \chi s \right) \Big|_{s=\alpha_i} \end{aligned}$$

が成り立つ。

9.4 定理 VIII：超楕円積分の加法定理へ

先ほどまでの議論では、 $x_1, \dots, x_\mu$ を

$$Fx = (\theta x)^2 \varphi_1 x - (\theta_1 x)^2 \varphi_2 x = 0$$

の解として定めていた。すなわち a_i, c_j から、 $x_1, \dots, x_\mu$ を定めていた。ここでは、逆に $x_1, \dots, x_{\mu'}$ を自由にとるところから話を始める（注意として、 $\varphi_1 x, \varphi_2 x, n, m$ はあらかじめ与えられているとする）。そこから定理 I のように積分の和を求めようとする場合、考えるべきは、 $x_1, \dots, x_{\mu'}$ が $Fx = 0$ の解となるような a_i, c_j を決定できるかということである。

つまり、各 l に対し、 $Fx_l = (\theta x_l)^2 \varphi_1 x_l - (\theta_1 x_l)^2 \varphi_2 x_l = 0$ が成り立っていないとてはならない。これは、

$$\theta x_l \sqrt{\varphi_1 x_l} = \varepsilon_l \theta_1 x_l \sqrt{\varphi_2 x_l}$$

と同値である。ちなみに ε_l が 1 か -1 のどちらなのか我々が自由に決めて良い。したがって、 a_i, c_j を決める条件は、

$$\begin{cases} \theta x_1 \sqrt{\varphi_1 x_1} &= \varepsilon_1 \theta_1 x_1 \sqrt{\varphi_2 x_1} \\ \theta x_2 \sqrt{\varphi_1 x_2} &= \varepsilon_2 \theta_1 x_2 \sqrt{\varphi_2 x_2} \\ &\vdots \\ \theta x_{\mu'} \sqrt{\varphi_1 x_{\mu'}} &= \varepsilon_{\mu'} \theta_1 x_{\mu'} \sqrt{\varphi_2 x_{\mu'}} \end{cases}$$

という連立方程式である。これは a_i, c_j に関する線型連立方程式になっている。 a_i, c_j の数の合計は $m + n + 2$ なので、 $\mu' = m + n + 1$ とすると、それを解くことによって a_i, c_j を決定することが可能である。 $m + n + 2$ から 1 減らしているのは、各方程式が定数項を持たないため、条件の数は実質、方程式の数より 1 少なくなるからである。（ただし、もちろん $x_1, \dots, x_{\mu'}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\mu'}$ の取り方によっては一意に決まり切らない可能性もある。）

以上により、 $x_1, \dots, x_{\mu'}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\mu'}$ を我々が与えることにより、 a_i, c_j が決まる。 $x_1, \dots, x_{\mu'}, \sqrt{\varphi_1 x_1}, \dots, \sqrt{\varphi_{\mu'} x_{\mu'}}$ の有理関数として、それぞれ表すことができる。そうすると、 Fx は確定する。ここで、 Fx の次数を μ とすると、 $x_1, \dots, x_{\mu'}$ はその根となることから、 $\mu' \leq \mu$ である。残りの解を $x_{\mu'+1}, \dots, x_\mu$ としたならば、定理 VII が使えるため、

$$\varepsilon_1 \psi x_1 + \dots + \varepsilon_{\mu'} \psi x_{\mu'} + \dots + \varepsilon_\mu \psi x_\mu = v \quad (v : a_i, c_j \text{ の代数・対数的表示式})$$

が成り立つ。より正確には、

$$v = C + \Pi \frac{r}{\sqrt{\varphi t}} \log \chi t - \sum_{i=1}^{\omega} \frac{1}{(k_i - 1)!} \cdot \frac{d^{k_i-1}}{ds^{k_i-1}} \left(\frac{f_i s}{\sqrt{\varphi s}} \log \chi s \right) \Big|_{s=\alpha_i}$$

ということである。そして、移項することで、

$$\varepsilon_1 \psi x_1 + \dots + \varepsilon_{\mu'} \psi x_{\mu'} = v - \varepsilon_{\mu'+1} \psi x_{\mu'+1} - \dots - \varepsilon_\mu \psi x_\mu$$

とできる。ここで、左辺の $x_1, \dots, x_{\mu'}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\mu'}$ は我々がとったものであり、それにより a_i, c_j が決まり、残りの $x_{\mu'+1}, \dots, x_\mu, \varepsilon_{\mu'+1}, \dots, \varepsilon_\mu$ は、その a_i, c_j によって決まるものである。

結果をよりクリアにするために、

$$\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_{\mu_1} = 1, \quad \varepsilon_{\mu_1+1} = \dots = \varepsilon_{\mu'} = -1 \quad (\mu_1 \leq \mu')$$

とすることにし、 $\mu_2 = \mu' - \mu_1, \mu_3 = \mu - \mu'$ とする。つまり、 $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ である。そして、

$$x'_1 = x_{\mu_1+1}, x'_2 = x_{\mu_1+2}, \dots, x'_{\mu_2} = x_{\mu'} \quad y_1 = x_{\mu'+1}, y_2 = x_{\mu'+2}, \dots, y_{\mu_3} = x_{\mu}$$

と表記を改め、 $\varepsilon_{\mu'+1}, \dots, \varepsilon_{\mu}$ らをその -1 倍で置き換えれば、

$$\psi x_1 + \dots + \psi x_{\mu_1} - \psi x'_1 - \dots - \psi x'_{\mu_2} = v + \varepsilon_{\mu'+1} \psi y_1 + \dots + \varepsilon_{\mu} \psi y_{\mu_3}$$

という結果になる。ここまでをまとめると、以下のようになる：

定理. $\psi x = \int_0^x \frac{r dx}{\sqrt{\varphi x}}$ とし、 $\varphi x = \varphi_1 x \cdot \varphi_2 x$ としておき、自然数 n, m をとっておく。

$x_1, \dots, x_{\mu_1}, x'_1, \dots, x'_{\mu_2}$ をとると、 a_i, c_j が決まり、それにより

$$\psi x_1 + \dots + \psi x_{\mu_1} - \psi x'_1 - \dots - \psi x'_{\mu_2} = v + \varepsilon_1 \psi y_1 + \dots + \varepsilon_{\mu_3} \psi y_{\mu_3}$$

が成り立つように $y_1, \dots, y_{\mu_3}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\mu_3}$ を、 $x_i, x'_i, \sqrt{\varphi x_i}, \sqrt{\varphi x'_i}$ たちから代数的に決めることができる。

ここで、 φx の次数を ν 、 $\varphi_1 x, \varphi_2 x$ の次数をそれぞれ ν_1, ν_2 とすると、 $Fx = (\theta x)^2 \varphi_1 x - (\theta_1 x)^2 \varphi_2 x$ より、

$$\mu = \max \{2n + \nu_1, 2m + \nu_2\}$$

である (ただし、最高次の項が打ち消しあう極めて特殊な場合は考えないこととする)。よって、 $\mu \geq 2n + \nu_1$ かつ $\mu \geq 2m + \nu_2$ より、

$$\mu \geq m + n + \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} = m + n + \frac{\nu}{2}$$

となる。ところで、 $\mu' = \mu_1 + \mu_2 = m + n + 1$ であった。よって、 $\mu = \mu_3 + \mu'$ から、

$$\mu_3 \geq \frac{\nu}{2} - 1$$

となることがわかる。この μ_3 は、定理の等式の右辺の積分の和が何個からなるかという情報であり、これが小さいほど、よりシンプルな帰結ということで嬉しい。この μ_3 は最小値 $\lceil \frac{\nu}{2} \rceil - 1$ を果たしてとり得るのか。

設定を最初からやり直してみる。まず $\psi x = \int_0^x \frac{r dx}{\sqrt{\varphi x}}$ とする。そして、この段階で $x_1, \dots, x_{\mu_1}, x'_1, \dots, x'_{\mu_2}$ をとってしまう。つまり、 μ_1, μ_2 を自由に選んだこととなり、それにより $\mu' = \mu_1 + \mu_2$ は決まる。ここで、上の定理に帰結させたいのであれば、 $m, n, \varphi_1 x, \varphi_2 x$ を決めなくてはならない。それらが満たしてはいない条件は、

$$\begin{cases} m + n + 1 = \mu' \\ \varphi_1 x \cdot \varphi_2 x = \varphi x \end{cases}$$

である。 $\varphi_1 x, \varphi_2 x$ に関しては、次数 ν_1, ν_2 を決めることにより、次数がそうなるものを適当に選ぶこととする。そうすると、条件は

$$\begin{cases} m + n + 1 = \mu' \\ \nu_1 + \nu_2 = \nu \end{cases}$$

ということになる。この条件だけだと、 m, n, ν_1, ν_2 に関して、明らかにまだ自由度がある。そこで、その自由度を最終的に μ_3 が最小値をとるように使ってみよう。

ここで、 ν の偶奇で場合分けをする。まず ν が偶数のとき。このときは、 $\mu_3 = \frac{\nu}{2} - 1$ となってほしいわけであり、先ほどの推論を逆にたどれば、それは

$$\mu \geq 2n + \nu_1 \quad \mu \geq 2m + \nu_2$$

がどちらも等号であればよいわけである。つまり、

$$2n + \nu_1 = 2m + \nu_2$$

が満たすべき条件である。したがって、

$$\begin{cases} m + n + 1 = \mu' \\ \nu_1 + \nu_2 = \nu \\ 2n + \nu_1 = 2m + \nu_2 \end{cases}$$

を満たすような自然数 m, n, ν_1, ν_2 がとれれば問題ないが、 ν が偶数であることからそれは達成される。

ν が奇数のときは、 $\mu_3 = \frac{\nu+1}{2} - 1$ とすればよいわけで、

$$\mu = 2n + \nu_1 \quad \mu = 2m + \nu_2 + 1$$

または

$$\mu = 2n + \nu_1 + 1 \quad \mu = 2m + \nu_2$$

のどちらかが成り立っていればよい。このときも、この 1 つを加えた合計 3 つの条件を満たす自然数 m, n, ν_1, ν_2 は存在することがわかる。

以上のやり方で、 m, n, ν_1, ν_2 を選ぶことにより、 $\mu_3 = \left\lceil \frac{\nu}{2} \right\rceil - 1$ となるようにすることができた。以上をまとめると次の定理が得られる：

定理 (VIII). $\psi x = \int_0^x \frac{r dx}{\sqrt{\varphi x}}$ とする。ここで r は x の有理関数であり、 φx は x の $2\nu - 1$ 次または 2ν 次の多項式である。このとき、 $x_1, \dots, x_{\mu_1}, x'_1, \dots, x'_{\mu_2}$ をとると、 $x_i, x'_i, \sqrt{\varphi x_i}, \sqrt{\varphi x'_i}$ らによって定まる代数方程式を解くことにより、 $y_1, \dots, y_{\nu-1}$ が得られ、

$$\psi x_1 + \dots + \psi x_{\mu_1} - \psi x'_1 - \dots - \psi x'_{\mu_2} = v + \varepsilon_1 \psi y_1 + \dots + \varepsilon_{\nu-1} \psi y_{\nu-1}$$

となる。ただし、 v は x_i, x'_i についての代数・対数的表示式であり、 $\varepsilon_i = \pm 1$ である。

$y_1, \dots, y_{\nu-1}$ を決める代数方程式というのは、 Fx を $(x - x_1) \cdots (x - x'_{\mu_2})$ で割ったもの、すなわち、

$$\frac{(\theta x)^2 \varphi_1 x - (\theta_1 x)^2 \varphi_2 x}{(x - x_1) \cdots (x - x_{\mu_1})(x - x'_1) \cdots (x - x'_{\mu_2})} = 0$$

のことである。これは有理関数 r の取り方に依らない。

9.5 具体例で噛み砕く

「諸注意」の全容を見た。しかし、変数の数が今までの数学とは比べ物にならないほど多く、この「諸注意」よりもはるかに一般的な「パリの論文」を皆が無視したのにも頷けてしまう。逆に、この「諸注意」を拾い上げてくれたヤコビに感謝である。

例 1.

具体例で「諸注意」で展開された内容を見ていこう。まず定理 I を以下の設定で見直してみる。

$$\psi x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \varphi_1 x = 1+x, \quad \varphi_2 x = 1-x$$

$$\theta x = a_0, \quad \theta_1 x = c_0$$

これらが最初に必要な設定であった。ここから、何をしたのか思い出してみよう。まず、代数方程式 $Fx = 0$ を立てた。今回、それは

$$Fx = a_0^2(1+x) - c_0^2(1-x) = 0$$

$$x = \frac{c_0^2 - a_0^2}{c_0^2 + a_0^2}$$

と解ける。解がひとつなので、 x_1 ではなく簡単に x と書くことにする。 $a_0\sqrt{1+x} = \varepsilon c_0\sqrt{1-x}$ に上の式を代入することで、

$$a_0\sqrt{\frac{2c_0^2}{c_0^2 + a_0^2}} = \varepsilon c_0\sqrt{\frac{2a_0^2}{c_0^2 + a_0^2}}$$

となるため、 $\varepsilon = 1$ であることがわかる。

ここから何をしたかといえば、 dx を δ へ、今回でいえば、 dx を da_0, dc_0 に変換したのだった。それは $Fx = 0$ の両辺を微分することによって得られた。やってみると、

$$dFx = (a_0^2 + c_0^2)dx + 2a_0(1+x)da_0 - 2c_0(1-x)dc_0 = 0$$

が得られ、これにより、

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2a_0}{a_0^2 + c_0^2} \cdot \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}da_0 + \frac{2c_0}{a_0^2 + c_0^2} \cdot \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dc_0$$

となる。ここから、右辺から x を消すことが定理 I の証明の次の課題であったが、今回は $x = \frac{c_0^2 - a_0^2}{c_0^2 + a_0^2}$ を代入することで簡単に達成される。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= -\frac{2c_0}{a_0^2 + c_0^2}da_0 + \frac{2a_0}{a_0^2 + c_0^2}dc_0 \\ &= \frac{-2c_0da_0 + 2a_0dc_0}{a_0^2 + c_0^2} \end{aligned}$$

以上で、最後の積分計算を残して、目標は達成できた。

ところで、今まで見てきた a_0, c_0 の式はすべて斉次式である。よって、 $u = \frac{a_0}{c_0}$ と置くことにより、変数をひとつ減らすことができる。 $u = \frac{a_0}{c_0}$ の両辺を微分することで、

$$du = \frac{c_0da_0 - a_0dc_0}{c_0^2}$$

が得られる。よって、

$$\begin{aligned} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \frac{-2c_0^2}{a_0^2 + c_0^2} \cdot \frac{c_0da_0 - a_0dc_0}{c_0^2} \\ &= \frac{-2du}{1+u^2} \end{aligned}$$

が成り立つ。

この積分を正確に扱うためには、両辺の微分に適切な舞台を与える必要がある。左辺の微分は、 $\sqrt{1-x^2}$ のリーマン球面であり、右辺の微分は、現代の言葉で書けば $\mathbb{P}_\mathbb{C}^1$ である。もちろん、これらの概念はアーベルの時点では知られていない。 $\sqrt{1-x^2}$ のリーマン球面には、上の面に z' 、下の面に z という座標が張られている。今回の話における $x = \frac{c_0^2 - a_0^2}{c_0^2 + a_0^2} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ という変換が、2つの舞台をどう対応させることになるのか、面白いので是非考えてもらいたい。

例 2.

次に

$$\begin{aligned}\psi x &= \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & \varphi_1 x &= 1+x, & \varphi_2 x &= 1-x \\ \theta x &= a_0 + a_1 x, & \theta_1 x &= c_0\end{aligned}$$

という 2 番目に簡単な状況を考える。このとき、

$$Fx = a_1^2 x^3 + (a_1^2 + 2a_0 a_1) x^2 + (a_0^2 + 2a_0 a_1 + c_0^2) x + (a_0^2 - c_0^2) = 0$$

となる。この 3 つの解を x_1, x_2, x_3 とおく。今回は定理 I(定理 III) の最終的な計算結果を用いることにすると、

$$\varepsilon_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 \psi x_2 + \varepsilon_3 \psi x_3 = C + \Pi \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \log \frac{(a_0 + a_1 t) \sqrt{1+t} + c_0 \sqrt{1-t}}{(a_0 + a_1 t) \sqrt{1+t} - c_0 \sqrt{1-t}}$$

となる。ところで、

$$\Pi \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \log \frac{(a_0 + a_1 t) \sqrt{1+t} + c_0 \sqrt{1-t}}{(a_0 + a_1 t) \sqrt{1+t} - c_0 \sqrt{1-t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \log \frac{(a_0 + a_1 t) \sqrt{1+t} + c_0 \sqrt{1-t}}{(a_0 + a_1 t) \sqrt{1+t} - c_0 \sqrt{1-t}}$$

より、次数を換算すれば、これは 0 になることがわかる。よって、

$$\varepsilon_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 \psi x_2 + \varepsilon_3 \psi x_3 = C.$$

この結果から、円積分の加法定理 (sin の加法定理) を導き出すことができる。そのためには、最初に x_1, x_2 をとり、 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ と指定することになるので、発想としては定理 VIII のものだ。上と同じ状況をつくるためには、

$$Fx = a_1^2 x^3 + (a_1^2 + 2a_0 a_1) x^2 + (a_0^2 + 2a_0 a_1 + c_0^2) x + (a_0^2 - c_0^2) = 0$$

が x_1, x_2 を解としてもつような a_0, a_1, c_0 を選ぶ必要がある。簡単のため、ここでも $u = \frac{a_0}{a_1}, v = \frac{c_0}{a_1}$ と変数をひとつ減らすと、

$$Fx = x^3 + (1 + 2u) x^2 + (u^2 + 2u + v^2) x + (u^2 - v^2) = 0$$

となる。解と係数の関係から、 u, v, x_3 は

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= -1 - 2u \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 &= u^2 + 2u + v^2 \\ x_1 x_2 x_3 &= v^2 - u^2 \end{cases}$$

を満たさなくてはならない。よって、変数 u, v, x_3 に対し、式が 3 つなので、値を決定することができる。実際に計算すると、

$$x_3 = x_1 \sqrt{1-x_2^2} + x_2 \sqrt{1-x_1^2}$$

また $\varepsilon_3 = -1$ を得る。このとき、 $x_1 = x_2 = 0$ なら $x_3 = 0$ であるため、

$$\begin{aligned} \int_0^0 \frac{dx_1}{\sqrt{1-x_1^2}} + \int_0^0 \frac{dx_2}{\sqrt{1-x_2^2}} - \int_0^0 \frac{dx_3}{\sqrt{1-x_3^2}} &= C \\ 0 &= C \end{aligned}$$

を得る．以上より， $x_3 = x_1\sqrt{1-x_2^2} + x_2\sqrt{1-x_1^2}$ ならば，

$$\int_0^{x_1} \frac{dx_1}{\sqrt{1-x_1^2}} + \int_0^{x_2} \frac{dx_2}{\sqrt{1-x_2^2}} = \int_0^{x_3} \frac{dx_3}{\sqrt{1-x_3^2}}$$

が成り立つという円積分の加法定理を得ることができた．

例 3.

上の観察をもって，今度はレムニスケート積分の加法定理を狙ってみる．例えば，

$$\begin{aligned} \psi x &= \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, & \varphi_1 x &= (1+x^2)(1+x), & \varphi_2 x &= 1-x \\ \theta x &= a_0, & \theta_1 x &= c_0 \end{aligned}$$

という状況はどうであろうか．例 2 と同じように Fx が 3 次式となるので，加法定理の形にもっていけそうに思えるが，実はそうはいかない．なぜなら，最終的に， x_1, x_2 が根となるように a_0, c_0 を決めることになるわけだが，斉次性より，実際のパラメータはひとつなので，そのようなものを見つけることは一般にできない．

ということで，代わりに

$$\begin{aligned} \psi x &= \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, & \varphi_1 x &= (1+x^2)(1+x), & \varphi_2 x &= 1-x \\ \theta x &= a_0, & \theta_1 x &= c_0 + c_1 x \end{aligned}$$

という状況を考えてみよう．このとき，

$$Fx = (a_0^2 + c_1^2)x^3 + (a_0^2 - c_1^2 + 2c_0c_1)x^2 + (a_0^2 + c_0^2 - 2c_0c_1)x + (a_0^2 - c_0^2) = 0$$

となる．この 3 つの解を x_1, x_2, x_3 とする．今回は定理 VI の状況なので，

$$\varepsilon_1\psi x_1 + \varepsilon_2\psi x_2 + \varepsilon_3\psi x_3 = C$$

がすぐにわかる．よって，後は x_1, x_2 をとり， $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ として， $x_3, u = \frac{c_0}{a_0}, v = \frac{c_1}{a_0}$ を，解と係数の関係

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{1-v^2+2uv}{1+v^2} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= \frac{1+v^2-2uv}{1+v^2} \\ x_1x_2x_3 &= -\frac{1-u^2}{1+v^2} \end{cases}$$

から決定すればよい．計算すると，

$$x_3 = \frac{x_1\sqrt{(1-x_2^2)(1+x_2^2)} + x_2\sqrt{(1-x_1^2)(1+x_1^2)}}{1+x_1^2x_2^2}$$

また $\varepsilon_3 = -1$ となる．今回も $x_1 = x_2 = 0$ とすると， $x_3 = 0$ なので， $C = 0$ が得られる．以上より， $x_3 = \frac{x_1\sqrt{(1-x_2^2)(1+x_2^2)} + x_2\sqrt{(1-x_1^2)(1+x_1^2)}}{1+x_1^2x_2^2}$ ならば，

$$\int_0^{x_1} \frac{dx_1}{\sqrt{1-x_1^4}} + \int_0^{x_2} \frac{dx_2}{\sqrt{1-x_2^4}} = \int_0^{x_3} \frac{dx_3}{\sqrt{1-x_3^4}}$$

が成り立つというレムニスケート積分の加法定理が得られた．

第 10 章 ヤコビの逆問題へ

「パリの論文」は長らく無視される一方、「諸注意」はすぐにヤコビらに読まれた。ヤコビはアーベルと同時期に注目され始める数学者である。「諸注意」の後、Jacobi 1829「楕円関数論の新しい基礎」([16])、通称「新しい基礎」を出版する。これは、オイラーからルジャンドルまで続く楕円積分の変換理論の集大成である。

ヤコビはアーベルの「諸注意」に大いに感嘆し、そこから当時の数学者たちが進むべく道を提示した。そこで立つことになる問題がヤコビの逆問題である。ヤコビが「諸注意」をどのように受け取ったのか。Jacobi 1832([17]) にそれが丁寧に書かれている。

10.1 Jacobi 1832：今までを振り返り、今後の方向性を示す

この論文は、今まででわかっていることを整理し、今後の研究の方向性を示すという、当時の数学の流れを知りたい我々にとっても、とても有益なものである。本文は、今まで見てきたオイラーからルジャンドルにいたる楕円積分論を振り返るところから始まる。そして、アーベルによって持ち込まれた楕円積分の逆関数である楕円関数について省察される。

解析学の視点から

まずヤコビは $x = \sin u$ を次のように評価する：

- どのような値に対しても一意かつ確定した値をもち、
- u の累乗に従って進む級数に展開することができ、
- その級数は引数のすべての値に対して収束し、
- 関数が消滅するような u の値によって決定される一次因数に分解することができる (無限積による表示のこと)

これをもってヤコビは「 u の多項式関数をもつあらゆる性質を備えている」とまとめる。これらの性質はオイラー「無限解析序説」で説明されていて、既に広く知られていることであった。

一方、その逆関数である $u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ については、

- 常に収束するような級数に展開するようなことは決してできず、
- 値も確定しておらず、無限個の値をもっている。

と評価する。それ故、「固有の名称も記号も与えることは適当ではないと考えられていた」とヤコビはいう。確かに、「円積分」という名称は、レムニスケート積分からのアナロジーで私が勝手に呼んでいるだけで、基本的に $u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ に名前はない。

以上から、ヤコビは「解析学に持ち込まれるべき関数」の性質として、

- 一価である
- 任意の値に対して収束するような級数展開ができる
- 一次因数に分解できる

ということを条件に挙げていることが読み取れる．そして，第一種楕円積分 $u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}$ の逆関数 $x = \sin \operatorname{am}(u)$ ^{*5} は，

- どのような u に対しても，極めて急速に収束する級数に展開できる．
- 消滅するか，無限大に発散するような u の値によって決まる一次因数に分解できる．
- あらゆる超越関数に先んじて抜きん出ている性質，二重周期性をもつ．

とヤコビはいう．これは「新しい基礎」で確認された性質である．よって，楕円関数は，ヤコビにとって「解析学に持ち込まれるべき関数」なのである．

「諸注意」から問題提起へ

そしてヤコビは，「オイラーによる楕円積分の加法定理がアーベルにより拡張された」と，「諸注意」の内容に目を向ける．ヤコビはアーベルによる定理を次のような形で提示する：

定理. $X = f(x)$ を $2m$ または $2m-1$ 次多項式とし，

$$\Pi(x) = \int_0^x \frac{A + A_1 x + A_2 + \cdots + A_{m-2} x^{m-2}}{\sqrt{X}} dx$$

とする．このとき， $x, x_1, \dots, x_{m-1}$ に対し，

$$\Pi(x) + \Pi(x_1) + \cdots + \Pi(x_{m-1}) = \Pi(a) + \Pi(a_1) + \cdots + \Pi(a_{m-2})$$

を満たすような $a, a_1, \dots, a_{m-2}$ が， $x, x_1, \dots, x_{m-1}, \sqrt{X}, \sqrt{X_1}, \dots, \sqrt{X_{m-1}}$ によって定まる $m-1$ 次方程式の代数的な解として決定できる．ただし， $\sqrt{X_i} = f(x_i)$ としている．そして，その方程式は $A, A_1, \dots, A_{m-2}$ に依存しない．

これが「諸注意」をどう切り取ったものなのか考えよう．まず，主張の形自体は定理 VIII である．ただ，積分の分子の多項式の次数が $m-2$ となっているため，これは定理 VI の状況にあたり，定理 VIII における右辺の v は定数 C であることがわかる．したがって，等式が

$$\Pi(x) + \Pi(x_1) + \cdots + \Pi(x_{m-1}) = C + \varepsilon \Pi(a) + \varepsilon_1 \Pi(a_1) + \cdots + \varepsilon_{m-2} \Pi(a_{m-2})$$

と書かれているのであれば，定理 VIII の系として理解できる．しかし，ヤコビの書いたものは， $C = 0$ かつ $\varepsilon_i = 1$ という主張が追加されている．

前章の最終節において考えた例 2,3 では，ヤコビのいうように， $C = 0$ となり， ε もそのようになることがわかった．しかし，一般の状況で果たしてそれが言えるのか，私にはわからなかった．そのギャップを埋めるような言及はヤコビの周辺の論文にも見られなかったため，このギャップは「諸注意」から汲み取られるべきなのだろうが，私には難しかった．

ただ，このヤコビの主張自体が正しいことは，現代において保証されているので，この疑問は一旦おいておくことにしよう．以降，このヤコビが提示した主張を「超楕円積分の加法定理」と呼ぶことにする．

また，その超楕円積分の加法定理を繰り返し使うことで以下がいえる：

系. x が任意の個数与えられたとき，それらの与えられた値に対応する $\Pi(x)$ の和は，与えられた値から代数的に決定可能な a の値に対応する $m-1$ 個の $\Pi(a)$ の和によって，常に表現することができる．

^{*5} これは「新しい基礎」で導入されたヤコビによる楕円関数の表記であり，すなわち $\varphi = \operatorname{am}(u)$ としているのである．

言い換えると,

$x, x_1, \dots, x_n$ に対し,

$$\Pi(x) + \Pi(x_1) + \dots + \Pi(x_n) = \Pi(a) + \Pi(a_1) + \dots + \Pi(a_{m-2})$$

を満たすような $a, a_1, \dots, a_{m-2}$ が, $x_1, \dots, x_n, \sqrt{X}, \sqrt{X_1}, \dots, \sqrt{X_n}$ によって定まる $m-1$ 次方程式の代数的な解として決定できる. そして, その方程式は $A, A_1, \dots, A_{m-2}$ に依存しない.

その後ヤコビは, 我々がレムニスケート関数において観察したように, 楕円積分の加法定理をその逆関数である楕円関数に関する主張に言い換えることができることを思い出しながら, 次のような問題を提起する:

より一般的な場合において, 超楕円積分をその逆関数としてもつ, それらの関数とは一体いかなるものであり, またそれらの関数に関して, 提示された超楕円積分の加法定理はいかなる姿をとって現れるのだろうか?

具体例においてひとつの解答を示す

そして, ヤコビは次のような具体的な状況において考える.

$X = f(x)$ を 5 または 6 次多項式とし,

$$\Pi(x) = \int_0^x \frac{A + A_1 x}{\sqrt{X}} dx$$

とする. このとき, x, y, z に対し,

$$\Pi(x) + \Pi(y) + \Pi(z) = \Pi(a) + \Pi(b)$$

を満たすような a, b が, $x, y, z, \sqrt{f(x)}, \sqrt{f(y)}, \sqrt{f(z)}$ によって定まる 2 次方程式の代数的な解として決定できる. そして, その方程式は A, A_1 に依存しない.

ヤコビは a, b の決定が A, A_1 に依存しないことに注目する.

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}}, \quad \Phi_1(x) = \int_0^x \frac{x dx}{\sqrt{X}}$$

とすると, それぞれ $A_1 = 0$ のとき, $A = 0$ のときの結果によって,

$$\begin{cases} \Phi(x) + \Phi(y) + \Phi(z) &= \Phi(a) + \Phi(b) \\ \Phi_1(x) + \Phi_1(y) + \Phi_1(z) &= \Phi_1(a) + \Phi_1(b) \end{cases}$$

がいえることがわかる (現代の線型独立性の現れとも思える!). ここにおいて初めてアーベルの定理の真価が現れると言いたいわけである. そして, x, y, z の代わりに x, y, x', y' と 4 つ取った場合でも, それらから代数的に a, b が決定され, 同じ話ができる:

$$\begin{cases} \Phi(x) + \Phi(y) + \Phi(x') + \Phi(y') &= \Phi(a) + \Phi(b) \\ \Phi_1(x) + \Phi_1(y) + \Phi_1(x') + \Phi_1(y') &= \Phi_1(a) + \Phi_1(b) \end{cases}$$

ここで,

$$\Phi(x) + \Phi(y) = u, \quad \Phi_1(x) + \Phi_1(y) = v$$

とおき, x, y を u, v の関数とみなし,

$$x = \lambda(u, v), \quad y = \lambda_1(u, v)$$

とおく. さらに,

$$\Phi(x') + \Phi(y') = u', \quad \Phi_1(x') + \Phi_1(y') = v'$$

とおくと, 先ほどの結果は,

$$u + u' = \Phi(a) + \Phi(b), \quad v + v' = \Phi_1(a) + \Phi_1(b)$$

と書くことができ, さらに

$$a = \lambda(u + u', v + v'), \quad b = \lambda_1(u + u', v + v')$$

と書き換えることができる. この a, b が x, y, x', y' によって代数的に表示できるというのが加法定理の主張であったため, $f(x)$ が 5, 6 次の超楕円積分の加法定理は,

$\lambda(u + u', v + v'), \lambda_1(u + u', v + v')$ が

$$\lambda(u, v), \quad \lambda_1(u, v), \quad \lambda(u', v'), \quad \lambda_1(u', v')$$

によって代数的に表示できる.

という主張に言い換えることができる.

これはそのまま, $f(x)$ が $2m - 1$ または $2m$ 次のときに一般化することができる.

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}}, \quad \Phi_1(x) = \int_0^x \frac{xdx}{\sqrt{X}}, \quad \dots, \quad \Phi_{m-2}(x) = \int_0^x \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{X}}$$

とし,

$$\begin{cases} u = \Phi(x) + \Phi(x_1) + \dots + \Phi(x_{m-2}) \\ u_1 = \Phi_1(x) + \Phi_1(x_1) + \dots + \Phi_1(x_{m-2}) \\ \vdots \\ u_{m-2} = \Phi_{m-2}(x) + \Phi_{m-2}(x_1) + \dots + \Phi_{m-2}(x_{m-2}) \end{cases}$$

とおき, 各 x_i を $u, u_1, \dots, u_{m-2}$ の関数として,

$$x = \lambda(u, u_1, \dots, u_{m-2}), \quad x_1 = \lambda_1(u, u_1, \dots, u_{m-2}), \quad \dots, \quad x_{m-2} = \lambda_{m-2}(u, u_1, \dots, u_{m-2})$$

とおく. このとき超楕円積分の加法定理は,

各 $\lambda_i(u + u', u_1 + u'_1, \dots, u_{m-2} + u'_{m-2})$ が,

$$\lambda(u, u_1, \dots, u_{m-2}), \quad \lambda_1(u, u_1, \dots, u_{m-2}), \quad \dots, \quad \lambda_{m-2}(u, u_1, \dots, u_{m-2})$$

$$\lambda(u', u'_1, \dots, u'_{m-2}), \quad \lambda_1(u', u'_1, \dots, u'_{m-2}), \quad \dots, \quad \lambda_{m-2}(u', u'_1, \dots, u'_{m-2})$$

らによって代数的に表示できる.

という主張に言い換えられる.

結局、ヤコビの逆問題とは？

以上により、 $\lambda_i(u, u_1, \dots, u_{m-2})$ らを「超楕円積分の逆関数」にあたるものだと思うことで、加法定理の言い換えもできたわけで、ヤコビの提起した問題は、同じ論文の中で本人によって解決されたように思える。しかし、ヤコビは $f(x)$ が 5, 6 次のときの観察において、以下の言及を残している：

これらの関数 $\lambda(u, v), \lambda_1(u, v)$ を、もし我々が三角関数および楕円関数の類比を超楕円関数においても保ちたいと望むならば、解析学に導入することが不可欠である。

「解析学に導入することが不可欠である」というのは、最初に説明した「解析学に導入されるべき関数」の性質を満たしている必要があるということをいっているわけである。つまり、 $\lambda_i(u, u_1, \dots, u_{m-2})$ のそのような性質を明らかにして初めて、楕円関数の一般化するものを獲得できたことになる。 $\lambda_i(u, u_1, \dots, u_{m-2})$ のそのような性質はこの時点では何一つわかっていない。

10.2 4重周期関数？

ヤコビは至って冷静だった。続く論文 Jacobi 1835([18])において、なぜ楕円積分のときとは違い、超楕円積分においては逆関数を多変数関数として取るようになったのかという疑問に真摯に向き合った。そして、楕円積分のときと同じように、そのままそれ自身の逆関数をとった場合、それは4重周期関数になってしまうことを示唆し、そのような関数はあり得ないということで答えを提示した。

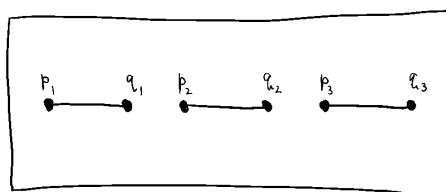
リーマン面において考える

ヤコビは4重周期性を観察するために、「新しい基礎」で得られた様々な式を用いた。それを追うためには、我々も「新しい基礎」から見ていかななくてはならないので、ここでは、ヤコビが示唆したことと同じことをリーマン面を先取りした上で観察しよう。すなわち、第一部の内容である。第一部では、積分をどのように扱うべきかという立場から、 $\sin$ の周期性、楕円関数の2重周期性の解釈を見た。今回も、与えられているのは積分である。

例として6次のときを考える。すなわち、

$$X = \sqrt{(z - p_1)(z - q_1)(z - p_2)(z - q_2)(z - p_3)(z - q_3)}$$

とおき、この代数関数のリーマン球面を $\mathfrak{R}$ とする。それをつくるための移行線は、第一部の付録における考察から、

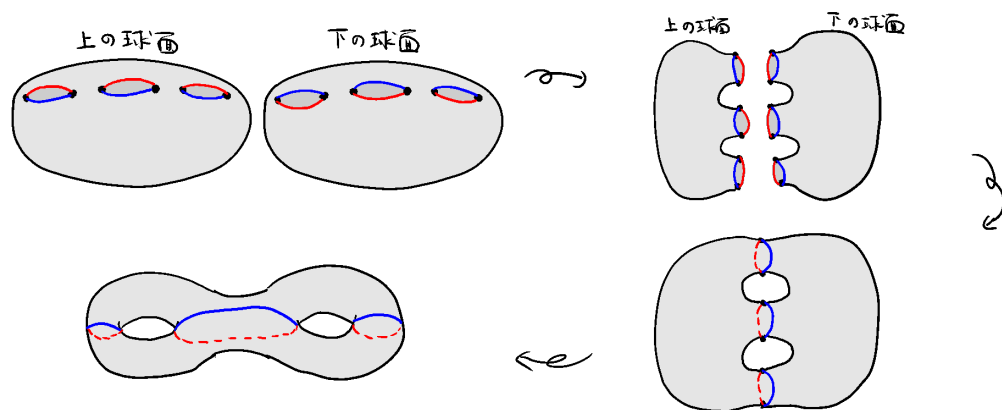


とすればよい。そして、これ上の微分

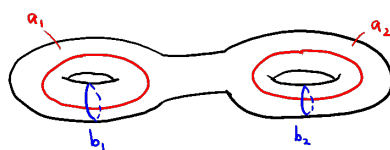
$$\Omega(z) = \frac{f(z)}{X} dz \quad (f(z) : z \text{ の多項式})$$

を考える。楕円積分のときと同様に、これも分岐点、また無限遠点においても有限であることがわかる。よって、 $\Re$ がこの微分を扱う舞台となる。

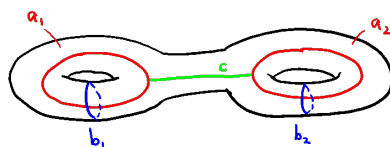
ここでも、 $\Re$ を切断して単連結面とし、 $\Omega(z)$ の計算法を確立しよう。まず、 $\Re$ は、



という形と思える。これをトーラスと同じように、



と切断してみる。すると、最後に、



と切れば、単連結面にすることができる。ただし、 a_1, a_2 を真ん中で接するように歪ませることで、 a_1, a_2, b_1, b_2 という4本のみで単連結面にすることができ、それが単連結面にするための最小の切断線の個数なので、 X のリーマン球面の連結度は5であり、種数は2である。

よって、4本の切断線に対し、4つの周期モジュールを A_1, A_2, B_1, B_2 とすることで、種数 0,1 のときと同様に、

$$\Omega(z) = W(z) + n_1 A_1 + n_2 A_2 + m_1 B_1 + m_2 B_2 \quad (n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z})$$

と書けることがわかる。よって、この逆関数を考えようものなら、例えば0の行先は、稠密な集合

$$\Lambda = \{n_1 A_1 + n_2 A_2 + m_1 B_1 + m_2 B_2 \mid n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$$

の点と同じ行先になり、そのような対応になっている写像の性質をみていくことは現実的ではない。

このように、楕円積分のときとは違い、超楕円積分の逆関数なるものを解析学に導入するためには、少なくとも1変数関数でない形である必要がある。この X のリーマン球面上の微分の話は、次章で詳しく扱うこととなる。

10.3 ヤコビの逆問題の定式化

ヤコビの興味は、 $x = \lambda(u, v), y = \lambda_1(u, v)$ という 2 つの関数の性質にあった。 x, y という u, v によって決まる量についてである。そこで、ヤコビは x, y について直接情報を求めるのではなく、 x, y を

$$A + Bt + Ct^2 = 0$$

の 2 解とし、その u, v によって決まる係数 $\frac{A}{C}, -\frac{B}{C}$ について考えていくという方向を示した。明示的に書くならば、 x, y を考える代わりに、

$$-\frac{B}{C} = x + y, \quad \frac{A}{C} = xy$$

について考えようということである。この問題の設定は、先ほどの Jacobi 1835 の最後、そして Jacobi 1846([19]) に見られる。

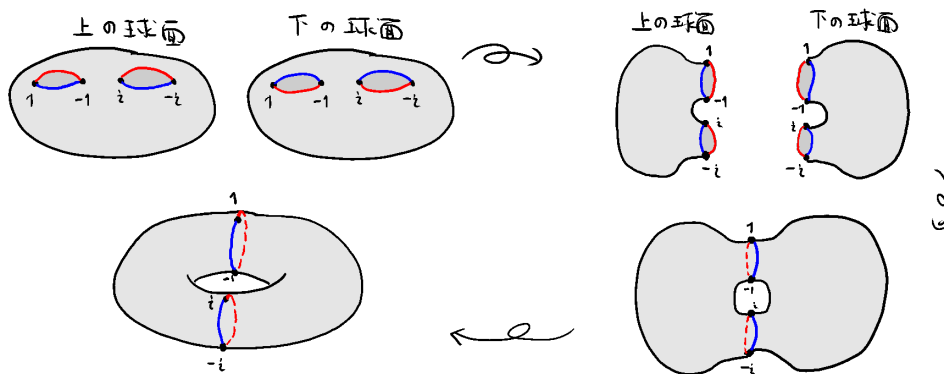
実際に $-\frac{B}{C}, \frac{A}{C}$ についてどのようなことが望まれていたのか。以降、数学的な議論としては次章で詳しく見ていくところだが、まず前提として、Jacobi は「新しい基礎」において、楕円関数をテータ関数というものの商に還元させることに成功していた。そのことを踏まえて、5, 6 次の超楕円積分についてのヤコビの逆問題として、1846, 1847 年にローゼンハインとゲーベルが独立して、先ほどの $-\frac{B}{C}$ と $\frac{A}{C}$ をテータ関数の商に還元できることを示す ([20] を参照)。その後、ワイエルシュトラスが 1849 年から続く三篇の論文 ([20], [21], [22]) で、一般の超楕円積分に対して、同様のことを示した。これをもって、超楕円積分におけるヤコビの逆問題が解決されたのである。次章で、この超楕円積分におけるヤコビの逆問題解決をリーマン後の視点から見てみたいと思う。

第 11 章 楕円関数とテータ関数

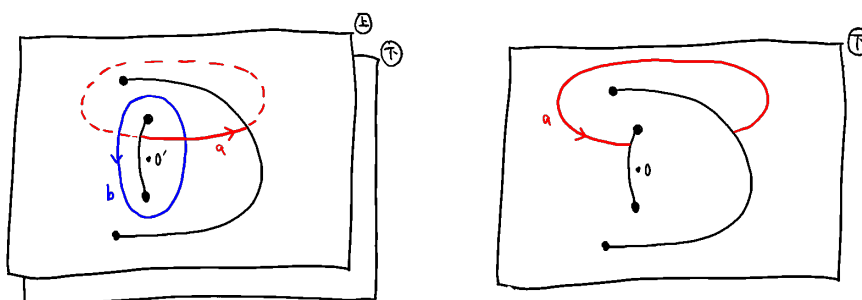
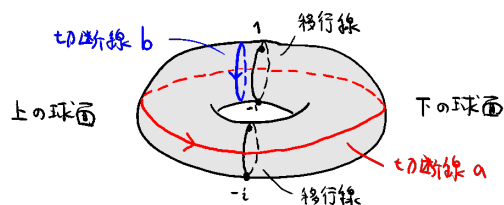
Jacobi 1832 で示唆された当初のヤコビの逆問題について、楕円積分に対して問題になることは何ひとつない。しかし、一般の超楕円積分に対するヤコビの逆問題の最終的な定式化を見れば、「逆関数の情報がテータ関数というものに帰着される」という、我々がまだ楕円積分に対しても触れていない内容が現れる。ということで、楕円積分の逆関数である楕円関数がテータ関数の商に還元されるということを見ていこう^{*6}。第一部の付録と同様に、例としてレムニスケート積分について見ていく。

まずは、第一部の付録の内容を振り返ろう。レムニスケート積分 $\Omega(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$ を扱う舞台となった $\sqrt{1-z^4}$ のリーマン球面 $\mathfrak{R}$ は、

^{*6} この章と次章は Neumann 1865 を参考にしている。



という様子だった。そして、切断線を次のように入れることによって、単連結面 Ω' を得た：



この 2 つの切断線 a, b の $\Omega(z)$ における周期モジュールをそれぞれ A, B とおくことで、

$$\Omega(z) = W(z) + A \cdot (\text{切断線 } a \text{ をまたいだ回数}) + B \cdot (\text{切断線 } b \text{ をまたいだ回数})$$

という計算法を得ていた。

ここで、切断線 a の周期モジュールが $2\pi i$ である簡単な場合を考えたいので、 $\Omega(z)$ と $W(z)$ の代わりに、

$$\omega(z) = \frac{2\pi i}{A} \cdot \Omega(z) \quad w(z) = \frac{2\pi i}{A} \cdot W(z)$$

とおく。すると、 $\omega(z)$ における切断線 a, b の周期モジュールは、それぞれ

$$2\pi i, \quad \frac{2\pi i B}{A}$$

となる。ここで $\frac{2\pi i B}{A}$ を δ とおいておき、また $\delta = \alpha + i\beta$ としておく。

11.1 テータ関数の収束性に関する補題

$w(z)$ は $\Re'$ 上の複素関数である．そこで $w(z) = U + iV$ とおく．このとき，微分 UdV の $\Re'$ の境界 $\partial\Re'$ 全体での積分， $\int_{\partial\Re'} UdV$ は正であることが確かめられる．それを実際に見てみよう．

まず $dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy$ より，

$$\int_{\partial\Re'} UdV = \int_{\partial\Re'} \left(U \frac{\partial V}{\partial x} dx + U \frac{\partial V}{\partial y} dy \right)$$

$P = U \frac{\partial V}{\partial x}, Q = U \frac{\partial V}{\partial y}$ とおけば，グリーンの定理の等式に現れる形になる：

$$\int_{\partial\Re'} (Pdx + Qdy) = \iint_{\Re'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

$\Re'$ は単連結面であるため，この定理は成り立つ．このとき，

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} + U \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} - U \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \\ &= \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \left(-\frac{\partial V}{\partial x} \right) \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \quad (\text{コーシー・リーマン関係式より}) \end{aligned}$$

と計算できるため，結果的に，

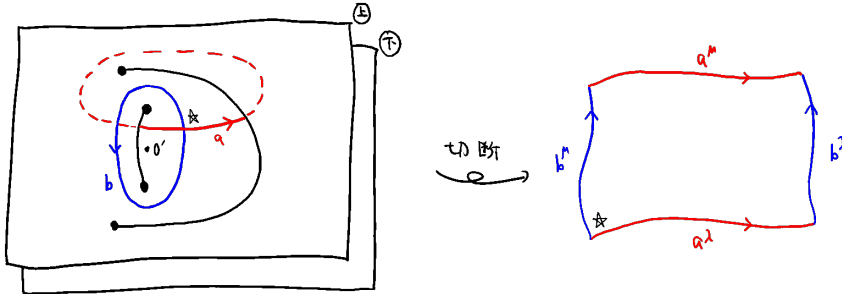
$$\int_{\partial\Re'} UdV = \iint_{\Re'} \left(\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right) dxdy$$

を得る．よって，

$$\int_{\partial\Re'} UdV > 0$$

がいえる．

次に $\int_{\partial\Re'} UdV$ を直接計算してみよう．まず積分範囲である $\partial\Re'$ が何だったか振り返る．もともと $\Re$ は閉曲面であった．よってこれは境界をもたない．そして，切断線 a, b で切ることによって $\Re'$ を得た．切断後に分かれた2つにそれぞれ以下のように記号を与える：



ここで， a, b 上の点に関して， a^λ, b^λ 上で考えているときは， U, V を U^λ, V^λ と書き， a^μ, b^μ 上で考えているときは， U, V を U^μ, V^μ と書くことにする．すると，周期モジュールの値から，

$$a \text{ においては } U^\lambda - U^\mu = 0, \quad V^\lambda - V^\mu = 2\pi$$

$$b \text{ においては } U^\lambda - U^\mu = \alpha, \quad V^\lambda - V^\mu = \beta$$

であることがわかる．よって， V^λ と V^μ の差は定数であることから， $dV^\lambda = dV^\mu$ ．よって，

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Re'} U dV &= \int_{a^\lambda} U^\lambda dV^\lambda - \int_{a^\mu} U^\mu dV^\mu + \int_{b^\lambda} U^\lambda dV^\lambda - \int_{b^\mu} U^\mu dV^\mu \\ &= \int_a (U^\lambda - U^\mu) dV + \int_b (U^\lambda - U^\mu) dV \\ &= \int_a 0 dV + \int_b \alpha dV \\ &= \alpha \int_b dV \end{aligned}$$

と計算できる．最後に出てきた積分 $\int_b dV$ は $\Re'$ 上で b^λ に沿った V の積分と思っても， b^μ に沿った V の積分と思ってもよいのだが，どちらの場合でも，それは a^λ の点から，対応する a^μ の点への積分である．それは，切断線 a の周期モジュールを求める積分の道の逆向きのものになるため，それは $V^\mu - V^\lambda = -2\pi$ となる．以上より，

$$\int_{\partial \Re'} U dV = -2\pi\alpha$$

したがって，グリーンの定理から導いた結果から， $\alpha < 0$ を得た．

11.2 テータ関数導入

ここで変数 U に対し，テータ関数を次で定義する．

$$\vartheta(U) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\delta n^2 + 2Un}$$

先ほどの補題より， $\operatorname{Re} \delta < 0$ であるため，この級数は収束する．また，以下の公式を満たすことが確認できる：

- $\vartheta(-U) = \vartheta(U)$
- $\vartheta(U + m\pi i + l\delta) = e^{-(\delta l^2 + 2Ul)} \cdot \vartheta(U)$
- $\vartheta\left((m + \frac{1}{2})\pi i + (n + \frac{1}{2})\delta\right) = 0$

以降， $U = w - g$ とし (w は $w(z)$ のこと)， z の関数として， $\vartheta = \vartheta(U)$ がどのように振舞うのかについて見ていく．記法として， z が a^λ または b^λ 上を動いているとき， w, ϑ を $w^\lambda, \vartheta^\lambda$ と書き，対応する a^μ, b^μ 上の点を動いているとき， w, ϑ を w^μ, ϑ^μ と書く．すると，

$$a \text{ においては } w^\lambda - w^\mu = 2\pi i$$

$$b \text{ においては } w^\lambda - w^\mu = \delta$$

となる．よって，テータの公式から

$$a \text{ においては } \frac{\vartheta^\lambda}{\vartheta^\mu} = \frac{\vartheta(w^\mu - g + 2\pi i)}{\vartheta(w^\mu - g)} = 1$$

$$b \text{ においては } \frac{\vartheta^\lambda}{\vartheta^\mu} = \frac{\vartheta(w^\mu - g + \delta)}{\vartheta(w^\mu - g)} = e^{-(\delta + 2w^\mu - 2g)} = e^{2g - w^\lambda - w^\mu}$$

が得られる。よって、 ϑ は、切断線 a のおいては全くずれが見られないことがわかった。一方、切断線 b においては $e^{2g-w^\lambda-w^\mu}$ のずれがある。そこで、

$$\vartheta = \vartheta(w - g), \quad \vartheta' = \vartheta(w - g'), \quad \eta = e^{k \cdot w(z)}$$

とし、

$$\Theta = \left(\frac{\eta \cdot \vartheta}{\vartheta'} \right)^2$$

と定める。すると、

$$a \text{ においては } \frac{\Theta^\lambda}{\Theta^\mu} = \left(\frac{\eta^\lambda}{\eta^\mu} \right)^2 = e^{2k \cdot 2\pi i}$$

$$b \text{ においては } \frac{\Theta^\lambda}{\Theta^\mu} = \left(\frac{\eta^\lambda}{\eta^\mu} \right)^2 \cdot \frac{e^{2(2g-w^\lambda-w^\mu)}}{e^{2(2g'-w^\lambda-w^\mu)}} = e^{2k\delta+4(g-g')}$$

となる。これが共に 1 となるように、 k, g, g' を定めよう。まず、 k を整数 ν で固定すれば、前者は 1 となる。そして、後者が 1 となるためには、

$$\nu\delta + 2(g - g') = -\xi\pi i \quad (\xi : \text{整数})$$

となればよい。よって、

$$g' = g + \frac{\nu\delta}{2} + \frac{\xi\pi i}{2}$$

と g' を g, ν, ξ をもって定義することにする。以上より、定数 g と整数 ν, ξ によって定まる

$$\Theta = \left(\frac{\vartheta(w - g)}{\vartheta(w - g - \xi \frac{\pi i}{2} - \nu \frac{\delta}{2})} \cdot e^{\nu \cdot w} \right)^2$$

は、切断線をまたいでも連続性は損なわれないため、 $\Re$ 上の関数になる。

11.3 テータ関数の零点

$\Re'$ 上の関数 ϑ は零点をどれだけ持っているか。それを調べるためには、現代でいうところの偏角の原理に倣って、 $\frac{d\vartheta}{\vartheta}$ を $\Re'$ の境界上で積分すればよい。

$$\int_{\partial \Re'} \frac{d\vartheta}{\vartheta} = \int_a \left(\frac{d\vartheta^\lambda}{\vartheta^\lambda} - \frac{d\vartheta^\mu}{\vartheta^\mu} \right) + \int_b \left(\frac{d\vartheta^\lambda}{\vartheta^\lambda} - \frac{d\vartheta^\mu}{\vartheta^\mu} \right)$$

ここで、

$$d \left(\frac{\vartheta^\lambda}{\vartheta^\mu} \right) = \left(\frac{d\vartheta^\lambda}{\vartheta^\lambda} - \frac{d\vartheta^\mu}{\vartheta^\mu} \right) \cdot \frac{\vartheta^\lambda}{\vartheta^\mu}$$

より、

- a においては、 $\frac{\vartheta^\lambda}{\vartheta^\mu} = 1$ であったため、

$$\frac{d\vartheta^\lambda}{\vartheta^\lambda} - \frac{d\vartheta^\mu}{\vartheta^\mu} = 0$$

- b においては、 $\frac{\vartheta^\lambda}{\vartheta^\mu} = e^{2g-w^\lambda-w^\mu}$ であったため、両辺を微分することで、

$$\frac{d\vartheta^\lambda}{\vartheta^\lambda} - \frac{d\vartheta^\mu}{\vartheta^\mu} = -dw^\lambda - dw^\mu$$

となる。よって,

$$\int_{\partial\mathfrak{R}'} \frac{d\vartheta}{\vartheta} = - \int_b (dw^\lambda + dw^\mu)$$

となり, $w^\lambda - w^\mu = \delta$ の両辺を微分することで, b 上 $dw^\lambda = dw^\mu$ が得られるため,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathfrak{R}'} \frac{d\vartheta}{\vartheta} &= -2 \int_b dw = 4\pi i \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathfrak{R}'} \frac{d\vartheta}{\vartheta} &= 2 \end{aligned}$$

を得る。したがって, ϑ は, $\mathfrak{R}'$ 上, 重複を含めて 2 つの零点をもつことがわかった。

以上より, ϑ の零点を z_1, z_2 , ϑ' の零点を z'_1, z'_2 とすると, Θ は, $\mathfrak{R}'$ 上で,

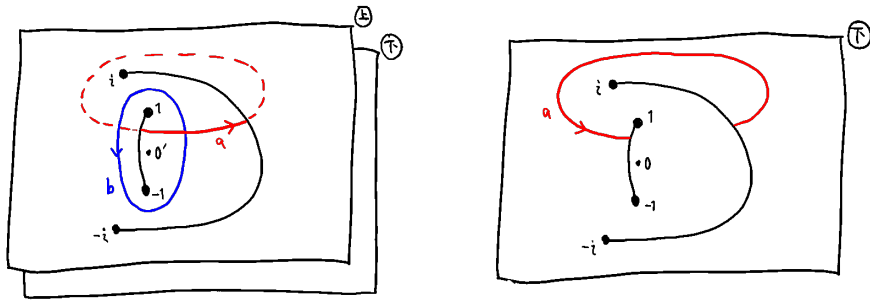
- z_1, z_2 において, 位数 2
- z'_1, z'_2 において, 位数 -2
- それ以外の点において, 位数 0

であることがわかる。

11.4 Θ の零点と極を仕込む

定数 g, ν, μ によって Θ は定まっている。そこで, それらを調整することで, Θ の零点と極を意のままにしよう。 $0, 0'$ で位数 2, ∞, ∞' で位数 -2 となることを目指してみる。

ところで, $w(0) = 0$ は簡単だが, $w(0'), w(\infty), w(\infty')$ はどのように計算できるか。 $w(z)$ は楕円積分を正規化したものであった。楕円積分とはそう簡単に計算できるものではない。したがって, 既知の値を使って $w(0'), w(\infty), w(\infty')$ を表すことを考える。積分値に関して既知のものとして周期モジュールがある。切断線 a については $2\pi i$ であり, 切断線 b については δ であった。



例えば, 次のような関係式が得られる。まず, $\mathfrak{R}$ の下の面において -1 から 1 へ向かう直線を σ とすると,

$$\frac{2\pi i}{A} \int_{\sigma} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = w(1) - w(-1)$$

である。一方, 上の面において, 同じように -1 から 1 へ向かう直線を σ' とすると, 切断線 a をまたぐため,

$$\frac{2\pi i}{A} \int_{\sigma} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = w(1) - w(-1) - 2\pi i$$

となる． σ と σ' は互いに重なり合うため，上の面と下の面における違いは被積分関数の符号のみであることから，

$$w(1) - w(-1) = -(w(1) - w(-1) - 2\pi i)$$

$$w(1) - w(-1) = \pi i$$

を得る．同様に，

- $-i$ から i へ向かう直線を考えることで，

$$w(i) - w(-i) = \pi i$$

- 1 から i へ向かう直線を考えることで，

$$w(i) - w(1) = -\frac{\delta}{2}$$

を得る．また，被積分関数が偶関数であることから，

$$w(1) + w(-1) = 0$$

を得る．以上により，得られた 4 つの関係式を解くことで，

$$w(1) = \frac{\pi i}{2}, \quad w(-1) = -\frac{\pi i}{2}, \quad w(i) = \frac{\pi i}{2} - \frac{\delta}{2}, \quad w(-i) = -\frac{\pi i}{2} - \frac{\delta}{2}$$

と値を求めることができる．

そして同様の考察により，

$$w(1) - w(0') - 2\pi i = -(w(-1) - w(0'))$$

$$w(i) - w(\infty') = -(w(-i) - w(\infty'))$$

$$w(i) - w(\infty') - 2\pi i = -(w(-i) - w(\infty))$$

という関係式が得られ，

$$w(0') = -\pi i, \quad w(\infty) = -\pi i - \frac{\delta}{2}, \quad w(\infty') = -\frac{\delta}{2}$$

と値を求めることができる．

よって， ϑ が $0, 0'$ で 1 位の零点になるためには， $\vartheta(-g)$ と $\vartheta(-\pi i - g)$ が 0 にならなくてははいけないことがわかった．ここで ϑ の 3 つ目の公式

$$\vartheta\left(\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi i + \left(n + \frac{1}{2}\delta\right)\right) = 0$$

を踏まえれば， $g = \frac{\pi i}{2} + \frac{\delta}{2}$ とすれば問題ないことがわかる．

次に， ϑ' が ∞, ∞' で 1 位の零点になるときを考えると， $\vartheta(-\pi i - \frac{\delta}{2} - g')$ と $\vartheta(-\frac{\delta}{2} - g')$ が 0 である必要があるため， $g' = \frac{\pi i}{2}$ とすれば問題ない． g' がそのようなになるためには，

$$g' = g + \frac{\nu\delta}{2} + \frac{\xi\pi i}{2}$$

より， $\nu = -1, \xi = 0$ とすればよい．

以上より， $g = \frac{\pi i}{2} + \frac{\delta}{2}, \nu = -1, \xi = 0$ とすれば， Θ は

- $0, 0'$ において, 位数 2
- ∞, ∞' において, 位数 -2
- それ以外の点において, 位数 0

となることがわかった.

ところで, 位数がそのようになっている $\mathfrak{A}$ 上の関数として z^2 がある. よって, 一般的な定理から,

$$z^2 = K \cdot \Theta \quad (K : \text{定数})$$

が成り立つ. したがって, $K' = \sqrt{K}$ とすれば,

$$z = K' \cdot \frac{\vartheta\left(w - \frac{\pi i}{2} - \frac{\delta}{2}\right)}{\vartheta\left(w - \frac{\pi}{2}\right)} \cdot e^{-w}$$

となる.

11.5 w から ω への移行

$w(z)$ に対し, $\omega(z)$ は道の取り方によって値が決まるため, 整数 m, l をもって,

$$\omega = w + m \cdot 2\pi i + l \cdot \delta$$

と書けた. すると ϑ の公式から,

$$\vartheta(\omega - g) = \vartheta(w - g + 2m\pi i + l\delta) = e^{-(l^2\delta + 2lw - 2lg)} \cdot \vartheta(w - g)$$

よって,

$$\frac{\vartheta(\omega - g)}{\vartheta(w - g)} = e^{-(l^2\delta + 2lw - 2lg)}$$

同様に,

$$\frac{\vartheta(\omega - g')}{\vartheta(w - g')} = e^{-(l^2\delta + 2lw - 2lg')}$$

となるため,

$$\frac{\vartheta(\omega - g)}{\vartheta(\omega - g')} = e^{2l(g - g')} \cdot \frac{\vartheta(w - g)}{\vartheta(w - g')}$$

が得られる. また

$$e^{\nu\omega} = e^{\nu(w + 2m\pi i + l\delta)} = e^{\nu w} \cdot e^{l\nu\delta}$$

より, 最終的に

$$\frac{\vartheta(\omega - g)}{\vartheta(\omega - g')} \cdot e^{\nu\omega} = e^{l(\nu\delta + 2(g - g'))} \cdot \frac{\vartheta(w - g)}{\vartheta(w - g')} \cdot e^{\nu w}$$

を得る. ここで $g = \frac{\pi i}{2} + \frac{\delta}{2}, g' = \frac{\pi i}{2}, \nu = -1$ を踏まえれば,

$$e^{l(\nu\delta + 2(g - g'))} = 1$$

となるため,

$$\frac{\vartheta\left(w - \frac{\pi i}{2} - \frac{\delta}{2}\right)}{\vartheta\left(w - \frac{\pi}{2}\right)} \cdot e^{-w} = \frac{\vartheta\left(w - \frac{\pi i}{2} - \frac{\delta}{2}\right)}{\vartheta\left(w - \frac{\pi}{2}\right)} \cdot e^{-w}$$

が成り立つ.

以上より, 前の結果から,

$$z = K' \cdot \frac{\vartheta\left(\omega - \frac{\pi i}{2} - \frac{\delta}{2}\right)}{\vartheta\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)} \cdot e^{-\omega}$$

が得られた.

11.6 結論

最後に得られた式

$$z = K' \cdot \frac{\vartheta\left(\omega - \frac{\pi i}{2} - \frac{\delta}{2}\right)}{\vartheta\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)} \cdot e^{-\omega}$$

は, 変数 ω の関数 z と思うことができ, それはまさしく (正規化された) 楕円積分 $\omega(z)$ の逆関数, つまり楕円関数である. したがって, 楕円関数をテータ関数の商 (+ 補助因子 $e^{-\omega}$) で書くことができた.

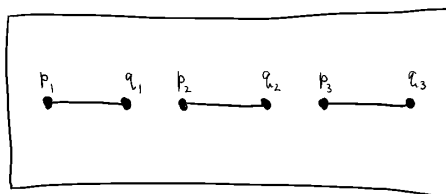
第 12 章 リーマンによるヤコビの逆問題解決

ヤコビの逆問題のきっかけとなったのは, アーベルの「諸注意」に書かれていた「超楕円積分の加法定理」であった. 一方, 当時無視されていた「パリの論文」においてアーベルは, より一般の「アーベル積分の加法定理」について論じていた. つまり, それを踏まえれば, ヤコビの逆問題は, ワイエルシュトラスによって解決された超楕円積分についてのものに留まらず, 一般のアーベル積分についての問題として考えることができる. そして, 初めてそこに進歩をもたらしたのがリーマンである. そのリーマンのアイデアを超楕円積分の例において見てみたいと思う.

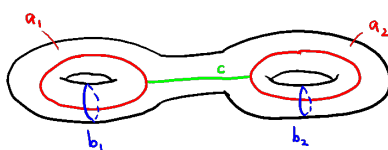
4 重周期性の考察において考えた設定と同じように, 6 次の超楕円積分についてヤコビの逆問題解決をみていく. つまり, それを扱うべき舞台は,

$$X = \sqrt{(z - p_1)(z - q_1)(z - p_2)(z - q_2)(z - p_3)(z - q_3)}$$

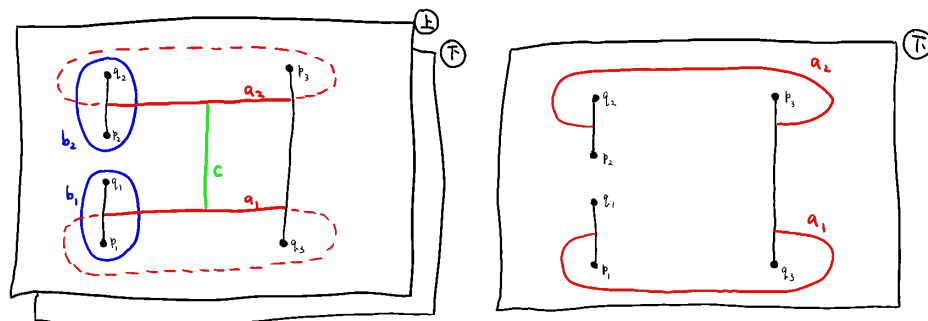
のリーマン球面 $\mathfrak{R}$ であり, それは



と移行線を入れることにより作ることができた. また



と切断線を入れることで、単連結面 $\mathfrak{N}'$ に切り開くことができた。座標の表示を優先した見方の上では、次のようになっている：



以降、超楕円積分

$$\Omega(z) = \int_0^z \frac{f(z)}{X} dz \quad (f(z) : z \text{ の多項式})$$

について考えていく。また、いつも通り $\mathfrak{N}'$ 上の同様のものを $W(z)$ と書く。これは $\mathfrak{N}'$ 上の一価関数である。

12.1 楕円積分における場合と同様の考察

まずは周期モジュールについて考えよう。切断線に対する λ, μ による記法は今までと同じように用いる。切断線が a_1, a_2, b_1, b_2, c と 5 つあることから、それぞれにおける $W(\lambda) - W(\mu)$ を周期モジュールとして、 A_1, A_2, B_1, B_2, C と定めれば良いように思えるが、 a_1, a_2 に関しては注意が必要である。というのも、今まで扱ってきた切断線とは違い、 a_1 も a_2 も途中で切断線 c により、2 つに分かれてしまう。よって、 c の左側を a'_1, a'_2 、右側を a''_1, a''_2 とし、それぞれにおける $W(\lambda) - W(\mu)$ を A'_1, A'_2, A''_1, A''_2 とする。以上により定義した定数 $A'_1, A'_2, A''_1, A''_2, B_1, B_2, C$ について、何か関係式が得られるだろうか。

そこで、「結節点の法則」というものがある。例として、 a_1 と c の交点を考える。1 本の線が入り、2 本の線が出るような点である。ここで、



と点 α, β, γ を定めれば、

$$A'_1 = W(\alpha) - W(\beta)$$

$$A''_1 = W(\gamma) - W(\beta)$$

$$C = W(\alpha) - W(\gamma)$$

と書けるため、

$$A'_1 = A''_1 + C$$

を得る。このように

$$(\text{入る線についての数の和}) = (\text{出る線についての数の和})$$

という公式が一般に成り立つ。残りの交点についても考えることで、

$$\begin{aligned} A'_2 + C &= A''_2 \\ A''_1 + B_1 &= B_1 + A'_1 \\ A''_2 + B_2 &= B_2 + A'_2 \end{aligned}$$

が得られる。以上より、

$$A'_1 = A''_1, \quad A'_2 = A''_2, \quad C = 0$$

となるため、 $A_1 = A'_1 = A''_1$, $A_2 = A'_2 = A''_2$ とおくことで、 a_1, a_2, b_1, b_2 の周期モジュール A_1, A_2, B_1, B_2 を主に考えていけばよいことがわかった。

次に、楕円積分において行ったように、 A_1, A_2, B_1, B_2 と $W(p_l), W(q_l)$ などの代表的な点での値を結び付けよう。 $\Re$ の下の面において、 p_3 から q_3 に向かう直線を σ とする。 σ はどの切断線も通らない。一方、上の面において p_3 から q_3 に向かう直線を σ' とすると、これは a_1 と a_2 をまたぐ。よって、 σ における積分と σ' における積分は符号の違いしかないことから、

$$\begin{aligned} W(q_3) - W(p_3) &= -(W(q_3) - W(p_3) + A_1 + A_2) \\ W(q_3) - W(p_3) &= -\frac{1}{2}(A_1 + A_2) \end{aligned}$$

を得る。他の点の組に対しても同様の考察をすることで、

$$\begin{aligned} W(q_1) - W(p_1) &= \frac{1}{2}A_1 & W(q_2) - W(p_2) &= \frac{1}{2}A_2 \\ W(p_3) - W(q_2) &= -\frac{1}{2}B_2 & W(p_1) - W(q_3) &= \frac{1}{2}B_1 \\ W(p_2) - W(q_1) &= \frac{1}{2}(B_2 - B_1) \end{aligned}$$

を得る。

最後に後に定めるテータ関数の収束性に関わる補題を示しておく。そこで、

$$\begin{aligned} W &= U + iV \\ A_1 &= \alpha_1 + i\alpha'_1 & A_2 &= \alpha_2 + i\alpha'_2 \\ B_1 &= \beta_1 + i\beta'_1 & B_2 &= \beta_2 + i\beta'_2 \end{aligned}$$

とおく。楕円積分の話において見たように、グリーンの定理から、

$$\int_{\partial\Re'} U dV > 0$$

がわかる。左辺を計算してみよう。 $\Re'$ の境界は切断線からなるため、

$$\begin{aligned} &\int_{\partial\Re'} U dV \\ &= \sum_{i=1,2} \left(\int_{a_i} (U^\lambda - U^\rho) dV + \int_{b_i} (U^\lambda - U^\rho) dV \right) + \int_c (U^\lambda - U^\rho) dV \end{aligned}$$

となる。一方,

$$\begin{aligned} a_i \text{ においては } U^\lambda - U^\mu &= \alpha_i, & V^\lambda - V^\mu &= \alpha'_i \\ b_i \text{ においては } U^\lambda - U^\mu &= \beta_i, & V^\lambda - V^\mu &= \beta'_i \\ c \text{ においては } U^\lambda - U^\mu &= 0, & V^\lambda - V^\mu &= 0 \end{aligned}$$

より,

$$\int_{\partial\Re'} U dV = \sum_{i=1,2} \left(\alpha_i \int_{a_i} dV + \beta_i \int_{b_i} dV \right)$$

となる。ここで、 a_i は b_i の周期モジュールを求めるときに考える曲線であり、 b_i は a_i の周期モジュールを求めるときに考える曲線の逆向きのものであるため、

$$\int_{a_i} dV = \beta'_i \quad \int_{b_i} dV = -\alpha'_i$$

である。以上より,

$$\int_{\partial\Re'} U dV = \sum_{i=1,2} (\alpha_i \beta'_i - \alpha'_i \beta_i)$$

となるため,

$$\sum_{i=1,2} (\alpha_i \beta'_i - \alpha'_i \beta_i) > 0$$

が得られた。

12.2 超楕円積分の組を考える

今まで考えてきた超楕円積分 $\Omega(z)$ とは別に

$$\Omega'(z) = \int_0^z \frac{f'(z)}{X} dz \quad (f'(z) : z \text{ の多項式})$$

をとろう。 $\Re'$ における同様のものを $W'(z)$ と書き、 $\Omega'(z)$ についての周期モジュールを A'_1, A'_2, B'_1, B'_2 と書くことにする。

関数 W 、微分 $\frac{f'(z)}{X} dz$ は $\Re'$ の至るところで有限であったため、微分 $W dW'$ は $\Re'$ の至るところで有限である。したがって、

$$\int_{\partial\Re'} W dW' = 0$$

が成り立つ。 $U dV$ のときと同じように左辺を計算してみると、

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Re'} W dW' \\ &= \sum_{i=1,2} \left(\int_{a_i} (W^\lambda - W^\rho) dW' + \int_{b_i} (W^\lambda - W^\rho) dW' \right) + \int_c (W^\lambda - W^\rho) dW' \\ &= \sum_{i=1,2} \left(A_i \int_{a_i} dW' + B_i \int_{b_i} dW' \right) \\ &= \sum_{i=1,2} (A_i B'_i - A'_i B_i) \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\sum_{i=1,2} (A_i B'_i - A'_i B_i) = 0$$

と, $\Omega(z)$ と $\Omega'(z)$ の周期モジュールの関係式が得られる.

12.3 再設定

ここで改めて

$$\Omega_1(z) = \int_0^z \frac{f_1(z)}{X} dz, \quad \Omega_2(z) = \int_0^z \frac{f_2(z)}{X} dz \quad (f_1(z), f_2(z) : z \text{ の多項式})$$

とし, $\mathfrak{R}'$ における同様のものを $W_1(z), W_2(z)$ とし, $\Omega_k(z)$ の周期モジュールを $A_1^{(k)}, A_2^{(k)}, B_1^{(k)}, B_2^{(k)}$ とする. また定数 $\Gamma_j^{(k)}$ をもって

$$\begin{cases} \omega_1(z) = \Gamma_1^{(1)} \Omega_1(z) + \Gamma_1^{(2)} \Omega_2(z) \\ \omega_2(z) = \Gamma_2^{(1)} \Omega_1(z) + \Gamma_2^{(2)} \Omega_2(z) \end{cases}$$

とし,

$$\begin{cases} w_1(z) = \Gamma_1^{(1)} W_1(z) + \Gamma_1^{(2)} W_2(z) \\ w_2(z) = \Gamma_2^{(1)} W_1(z) + \Gamma_2^{(2)} W_2(z) \end{cases}$$

とする. そして, $\omega_j(z)$ の周期モジュールを $a_{1j}, a_{2j}, b_{1j}, b_{2j}$ とすると,

$$\begin{aligned} a_{1j} &= \Gamma_j^{(1)} A_1^{(1)} + \Gamma_j^{(2)} A_1^{(2)} \\ a_{2j} &= \Gamma_j^{(1)} A_2^{(1)} + \Gamma_j^{(2)} A_2^{(2)} \\ b_{1j} &= \Gamma_j^{(1)} B_1^{(1)} + \Gamma_j^{(2)} B_1^{(2)} \\ b_{2j} &= \Gamma_j^{(1)} B_2^{(1)} + \Gamma_j^{(2)} B_2^{(2)} \end{aligned}$$

となっている. ここで,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi i & 0 \\ 0 & \pi i \end{pmatrix}$$

となるように, $\Gamma_j^{(k)}$ を決めよう. つまり,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(2)} \\ A_2^{(1)} & A_2^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_1^{(1)} \\ \Gamma_1^{(2)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \pi i \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(2)} \\ A_2^{(1)} & A_2^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_2^{(1)} \\ \Gamma_2^{(2)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \pi i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を解けばよいので,

$$\Gamma_1^{(1)} = \frac{\pi i A_2^{(2)}}{\Delta}, \quad \Gamma_1^{(2)} = -\frac{\pi i A_2^{(1)}}{\Delta}, \quad \Gamma_2^{(1)} = -\frac{\pi i A_1^{(2)}}{\Delta}, \quad \Gamma_2^{(2)} = \frac{\pi i A_1^{(1)}}{\Delta}$$

ということになる. ただし, $\Delta = \det \begin{pmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(2)} \\ A_2^{(1)} & A_2^{(2)} \end{pmatrix}$ としている. このとき, 前節の結果から

$$\sum_{i=1,2} (a_{i1} b_{i2} - a_{i2} b_{i1}) = 0$$

$$\pi i \cdot b_{12} - \pi i \cdot b_{21} = 0$$

$$b_{12} = b_{21}$$

を得る。よって、

$$(a_{ij}) = \pi i \cdot I \quad (b_{ij}) : \text{対称行列}$$

である。

W に対して前に観察した、代表的な点における値と周期モジュールの関係を w_1, w_2 においても計算しておこう。

$$w_1(q_1) - w_1(p_1) = \frac{\pi i}{2} \quad w_2(q_1) - w_2(p_1) = 0$$

$$w_1(q_2) - w_1(p_2) = 0 \quad w_2(q_2) - w_2(p_2) = \frac{\pi i}{2}$$

$$w_1(q_3) - w_1(p_3) = -\frac{\pi i}{2} \quad w_2(q_3) - w_2(p_3) = -\frac{\pi i}{2}$$

よって特に

$$w_i(q_l) + w_i(p_l) = \xi \frac{\pi i}{2} \quad (\xi : \text{整数})$$

が成り立つことがわかる。

12.4 テータ関数の導入

まずはテータ関数の収束性に関する結果を導く。整数 n_1, n_2 に対して、

$$\Omega(z) = n_1 \omega_1(z) + n_2 \omega_2(z) \quad W(z) = n_1 w_1(z) + n_2 w_2(z)$$

とすると、

$$(a_i \text{の周期モジュール}) = n_1 a_{i1} + n_2 a_{i2} = n_i \pi i (= \alpha_i + i \alpha'_i \text{とおく})$$

$$(b_i \text{の周期モジュール}) = n_1 b_{i1} + n_2 b_{i2} (= \beta_i + i \beta'_i \text{とおく})$$

となる。前に得た結果から、

$$\sum_{i=1,2} (\alpha_i \beta'_i - \alpha'_i \beta_i) > 0$$

b_{ij} の実部を r_{ij} とすると、

$$\sum_{i,j=1,2} n_i n_j r_{ij} < 0$$

を得る。よって、

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{i,j=1,2} n_i n_j b_{ij} \right) < 0$$

が成り立つ。

ここで、テータ関数を

$$\vartheta(U_1, U_2) = \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} e^{(b_{11} n_1^2 + 2b_{12} n_1 n_2 + b_{22} n_2^2) + 2(n_1 U_1 + n_2 U_2)}$$

と定義すると、得た結果からこれは収束する。また、このテータ関数について

- $\vartheta(U_1, U_2) = \vartheta(-U_1, -U_2)$
- $V_1 = U_1 + m_1\pi i + l_1b_{11} + l_2b_{21}, V_2 = U_2 + m_2\pi i + l_1b_{12} + l_2b_{22}$ とすると,

$$\vartheta(V_1, V_2) = e^{-\sum_{j=1,2} l_j(V_j + U_j + m_j\pi i)} \cdot \vartheta(U_1, U_2)$$

という公式が得られる.

以降, $U_1 = w_1 - g_1, U_2 = w_2 - g_2$ のときを考える. ここで,

$$a_i \text{ においては } w_j^\lambda - w_j^\mu = a_{ij} = \delta_{ij}\pi i$$

$$b_i \text{ においては } w_j^\lambda - w_j^\mu = b_{ij}$$

$$c \text{ においては } w_j^\lambda - w_j^\mu = 0$$

より, テータの公式から

$$a_i \text{ においては } \frac{\vartheta^\lambda}{\vartheta^\mu} = 1$$

$$b_i \text{ においては } \frac{\vartheta^\lambda}{\vartheta^\mu} = e^{2g_i - w_i^\lambda - w_i^\mu}$$

$$c \text{ においては } \frac{\vartheta^\lambda}{\vartheta^\mu} = 1$$

となり, b_i においてはずれが生じることがわかった. そこで,

$$\vartheta = \vartheta(w_1 - g_1, w_2 - g_2), \quad \vartheta' = \vartheta'(w_1 - g'_1, w_2 - g'_2), \quad \eta = e^{k_1w_1 + k_2w_2}$$

とし,

$$\Theta = \left(\frac{\eta \cdot \vartheta}{\vartheta'} \right)^2$$

と定義する. すると,

$$a_i \text{ においては } \frac{\Theta^\lambda}{\Theta^\mu} = e^{2k_i\pi i}$$

$$b_i \text{ においては } \frac{\Theta^\lambda}{\Theta^\mu} = e^{2(k_1b_{i1} + k_2b_{i2}) + 4(g_i - g'_i)}$$

$$c \text{ においては } \frac{\Theta^\lambda}{\Theta^\mu} = 1$$

となる. ここで, これらがすべて 1 になるように, 定数 k_i, g_i, g'_i を決めよう. そのためには,

$$k_i = \nu_i \quad (\nu_i : \text{整数})$$

$$(\nu_1b_{i1} + \nu_2b_{i2}) + 2(g_i - g'_i) = -\xi_i\pi i \quad (\xi_i : \text{整数})$$

となるようにすればよい. このとき, Θ は $\mathfrak{R}$ 上の関数となるわけである.

以下では, 特に $\nu_1, \nu_2 = 0$ のときを考える. そのとき, $\eta = 0$ より,

$$\Theta = \left(\frac{\vartheta(w_1 - g_1, w_2 - g_2)}{\vartheta(w_1 - g_1 - \xi_1 \frac{\pi i}{2}, w_2 - g_2 - \xi_2 \frac{\pi i}{2})} \right)^2$$

となっている.

12.5 テータ関数の零点

ϑ の $\Re'$ 上の零点の個数を調べるために, $\int_{\partial\Re'} \frac{d\vartheta}{\vartheta}$ を計算する. 楕円積分のときと同様に考えることで,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Re'} \frac{d\vartheta}{\vartheta} &= \sum_{i=1,2} \left(\int_{a_i} \left(\frac{d\vartheta^\lambda}{\vartheta^\lambda} - \frac{d\vartheta^\mu}{\vartheta^\mu} \right) + \int_{b_i} \left(\frac{d\vartheta^\lambda}{\vartheta^\lambda} - \frac{d\vartheta^\mu}{\vartheta^\mu} \right) \right) + \int_c \left(\frac{d\vartheta^\lambda}{\vartheta^\lambda} - \frac{d\vartheta^\mu}{\vartheta^\mu} \right) \\ &= - \sum_{i=1,2} \int_{b_i} (dw_i^\lambda + dw_i^\mu) \\ &= -2 \sum_{i=1,2} \int_{b_i} dw_i \\ &= a_{11} + a_{22} \\ &= 4\pi i \end{aligned}$$

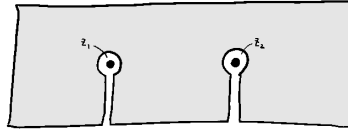
したがって, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Re'} \frac{d\vartheta}{\vartheta} = 2$ より, ϑ は $\Re'$ において, 重複を含めて 2 つの零点をもつ. よって, ϑ の 2 つの零点を z_1, z_2 とし, ϑ' の 2 つの零点を z'_1, z'_2 とすると, Θ は,

- z_1, z_2 において, 位数 2
- z'_1, z'_2 において, 位数 -2
- それ以外の点において, 位数 0

となることがわかる.

定数 g_1, g_2 と零点 z_1, z_2 の関係

楕円積分のときと同じように, 定数 g_1, g_2 をうまく定めることによって, ϑ の零点 z_1, z_2 を指定することを考える. そこで g_1, g_2 と z_1, z_2 の相互的な関係を見いだす必要がある. そのために,



という $\Re'$ の部分の境界において, φdw_i ($\varphi = \int_{z_0}^z \frac{d\vartheta}{\vartheta}$) を積分することで, その結果は 0 であることから, 最終的に

$$\begin{cases} g_1 = w_1(z_1) + w_1(z_2) + M_1\pi i + N_1b_{11} + N_2b_{12} \\ g_2 = w_2(z_1) + w_2(z_2) + M_2\pi i + N_1b_{21} + N_2b_{22} \end{cases} \quad (M_1, M_2, N_1, N_2 : \text{整数})$$

という関係式が得られる. この導出に関しては完全に省略する ([6] の第 11 講 3-6 節参照). 注意として, テータの公式から, $G_1 = g_1 + m_1\pi i + l_1b_{11} + l_2b_{21}$, $G_2 = g_2 + m_2\pi i + l_1b_{12} + l_2b_{22}$ とすると,

$$\vartheta(w_1 - G_1, w_2 - G_2) = e^{-\sum_{j=1,2} l_j(2w_j - 2g_j + m_j\pi i + l_1b_{1j} + l_2b_{2j})} \cdot \vartheta(w_1 - g_1, w_2 - g_2)$$

であり, $e^{-\sum_{j=1,2} l_j(2w_j - 2g_j + m_j\pi i + l_1b_{1j} + l_2b_{2j})}$ は零点を持たないため, $\vartheta(w_1 - G_1, w_2 - G_2)$ と $\vartheta(w_1 - g_1, w_2 - g_2)$ の零点は同じである. よって,

$$\begin{cases} G_1 = w_1(z_1) + w_1(z_2) + M_1\pi i + N_1b_{11} + N_2b_{12} \\ G_2 = w_2(z_1) + w_2(z_2) + M_2\pi i + N_1b_{21} + N_2b_{22} \end{cases}$$

より,

$$\begin{cases} g_1 = w_1(z_1) + w_1(z_2) + (M_1 - m_1)\pi i + (N_1 - l_1)b_{11} + (N_2 - l_2)b_{12} \\ g_2 = w_2(z_1) + w_2(z_2) + (M_2 - m_2)\pi i + (N_1 - l_1)b_{21} + (N_2 - l_2)b_{22} \end{cases}$$

となるため, 結果的に

$$\begin{cases} g_1 = w_1(z_1) + w_1(z_2) + M_1\pi i + N_1b_{11} + N_2b_{12} \\ g_2 = w_2(z_1) + w_2(z_2) + M_2\pi i + N_1b_{21} + N_2b_{22} \end{cases}$$

において整数 M_1, M_2, N_1, N_2 には任意性があることがわかった. すなわち, 与えた定数 g_1, g_2 に対し, M_1, M_2, N_1, N_2 の不定性にも関わらず, 上の連立方程式を満たすような z_1, z_2 が一意に定まる.

12.6 2 変数において考える

今までは1変数 z で考えていたが, 以降, 2つの変数 z_1, z_2 を考える. ただし, 今は z_1 のみ変数とし, z_2 は定数として扱う. また, 組 δ, δ' を3つの組 $p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, q_3$ のどれかとする. すると, $w_i(\delta') - w_i(\delta) = \xi_i \frac{\pi i}{2}$ (ξ_i : 整数) と書ける. そして,

$$g_i = w_i(\delta) - w_i(z_2) \quad g'_i = w_i(\delta') - w_i(z_2)$$

とすると, $g_i - g'_i = -\xi_i \frac{\pi i}{2}$ より,

$$\Theta = \left(\frac{\vartheta(w_1(z_1) - g_1, w_2(z_1) - g_2)}{\vartheta(w_1(z_1) - g'_1, w_2(z_1) - g'_2)} \right)^2$$

は $\Re$ 上の関数となる.

このとき, $z_1 = \delta$ は $\vartheta(w_1(z_1) - g_1, w_2(z_1) - g_2)$ の零点となっている. 実際,

$$\begin{cases} G_1 = w_1(z_1) + w_1(z_2) \\ G_2 = w_2(z_1) + w_2(z_2) \end{cases}$$

のとき, z_1, z_2 が $\vartheta(w(z) - G_1, w(z) - G_2)$ の零点になっているため, $z = z_1$ とすると, $\vartheta(-w_1(z_2), -w_2(z_2)) = 0$ を得る. よって,

$$\begin{aligned} \vartheta(w_1(\delta) - g_1, w_2(\delta) - g_2) &= \vartheta(w_1(z_2), w_2(z_2)) \\ &= \vartheta(-w_1(z_2), -w_2(z_2)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

したがって, δ は $\vartheta(w_1(z_1) - g_1, w_2(z_1) - g_2)$ の零点である. 同様に, δ' は $\vartheta(w_1(z_1) - g'_1, w_2(z_1) - g'_2)$ の零点となっている.

$\vartheta(w_1(z_1) - g_1, w_2(z_1) - g_2)$ と $\vartheta(w_1(z_1) - g'_1, w_2(z_1) - g'_2)$ のもうひとつの零点をそれぞれ $\varepsilon, \varepsilon'$ とすると,

$$\begin{cases} g_1 = w_1(\delta) + w_1(\varepsilon) + M_1\pi i + N_1b_{11} + N_2b_{12} \\ g_2 = w_2(\delta) + w_2(\varepsilon) + M_2\pi i + N_1b_{21} + N_2b_{22} \end{cases} \quad \begin{cases} g'_1 = w_1(\delta') + w_1(\varepsilon') + M'_1\pi i + N'_1b_{11} + N'_2b_{12} \\ g'_2 = w_2(\delta') + w_2(\varepsilon') + M'_2\pi i + N'_1b_{21} + N'_2b_{22} \end{cases}$$

によって, $\varepsilon, \varepsilon'$ は決定されるものとなる. 一方, g_1, g_2, g'_1, g'_2 の定義から, 左右はどちらも同じ条件になるため, $\varepsilon = \varepsilon'$ がいえる. したがって, Θ は

- δ において, 位数 2
- δ' において, 位数 -2

- それ以外の点において、位数 0

となっていることがわかる。つまり、位数が同じ

$$\varphi(z_1, z_2) = \left(\frac{(z_1 - \delta)(z_2 - \delta)}{(z_1 - \delta')(z_2 - \delta')} \right)^2$$

と定数倍を除いて一致する。ただし、この段階では $\frac{z_2 - \delta}{z_2 - \delta'}$ は定数である。よって、 $\frac{\Theta}{\varphi(z_1, z_2)}$ は z_1 に依存しない。ところで、 Θ も φ も z_1, z_2 に関して対称であることから、 $\frac{\Theta}{\varphi(z_1, z_2)}$ は z_2 にも依存しないことがわかる。以上より、 z_2 を変数だとした上でも、

$$\Theta = K \cdot \varphi(z_1, z_2) \quad (K : \text{定数})$$

と書けることがわかる。

12.7 結論

楕円積分のときと同じように w から ω への移行を行うことができ、

$$\Theta = \left(\frac{\vartheta(\omega_1(z_1) + \omega_1(z_2) - \omega_1(\delta), \omega_2(z_1) + \omega_2(z_2) - \omega_2(\delta))}{\vartheta(\omega_1(z_1) + \omega_1(z_2) - \omega_1(\delta'), \omega_2(z_1) + \omega_2(z_2) - \omega_2(\delta'))} \right)^2 = K' \cdot \varphi(z_1, z_2) \quad (K' : \text{定数})$$

が成り立つ。さらに $K'' = \sqrt{K'}$ とすることで、

$$\frac{\vartheta(\omega_1(z_1) + \omega_1(z_2) - \omega_1(\delta), \omega_2(z_1) + \omega_2(z_2) - \omega_2(\delta))}{\vartheta(\omega_1(z_1) + \omega_1(z_2) - \omega_1(\delta'), \omega_2(z_1) + \omega_2(z_2) - \omega_2(\delta'))} = K'' \frac{(z_1 - \delta)(z_2 - \delta)}{(z_1 - \delta')(z_2 - \delta')}$$

を得る。これによって、ヤコビの提起した問題が解決される。設定としては、最初に

$$\Omega_1(z) = \int_0^z \frac{f_1(z)}{X} dz, \quad \Omega_2(z) = \int_0^z \frac{f_2(z)}{X} dz \quad (f_1(z), f_2(z) : z \text{ の多項式})$$

をとっていた。ここで、

$$u = \Omega_1(z_1) + \Omega_1(z_2) \quad v = \Omega_2(z_1) + \Omega_2(z_2)$$

とおこう。これを

$$z_1 = \lambda_1(u, v) \quad z_2 = \lambda_2(u, v)$$

とし、 $\lambda_1(u, v), \lambda_2(u, v)$ を解析学に導入しようとしたのがヤコビの逆問題の原点であった。我々は定数 $\Gamma_j^{(k)}$ を定め、

$$\omega_1 = \Gamma_1^{(1)} \Omega_1 + \Gamma_1^{(2)} \Omega_2$$

$$\omega_2 = \Gamma_2^{(1)} \Omega_1 + \Gamma_2^{(2)} \Omega_2$$

とした。その上で結論として

$$\frac{\vartheta(\omega_1(z_1) + \omega_1(z_2) - \omega_1(\delta), \omega_2(z_1) + \omega_2(z_2) - \omega_2(\delta))}{\vartheta(\omega_1(z_1) + \omega_1(z_2) - \omega_1(\delta'), \omega_2(z_1) + \omega_2(z_2) - \omega_2(\delta'))} = K'' \frac{(z_1 - \delta)(z_2 - \delta)}{(z_1 - \delta')(z_2 - \delta')}$$

を得たわけだ。 u, v で表すと、

$$\frac{\vartheta(\Gamma_1^{(1)} u + \Gamma_1^{(2)} v - \omega_1(\delta), \Gamma_2^{(1)} u + \Gamma_2^{(2)} v - \omega_2(\delta))}{\vartheta(\Gamma_1^{(1)} u + \Gamma_1^{(2)} v - \omega_1(\delta'), \Gamma_2^{(1)} u + \Gamma_2^{(2)} v - \omega_2(\delta'))} = K'' \frac{(z_1 - \delta)(z_2 - \delta)}{(z_1 - \delta')(z_2 - \delta')}$$

となる．左辺のテータの商を T でおくと， z_1, z_2 は 2 次方程式

$$T = K'' \frac{(z - \delta)(z - \delta')}{(z - \delta')(z - \delta)}$$

$$(T - K'')z^2 - 2(\delta'T - \delta K'')z + (\delta'^2 T - \delta^2 K'') = 0$$

の解となる．その z_1, z_2 とは，すなわち $\lambda_1(u, v), \lambda_2(u, v)$ のことである．したがって， $\lambda_1(u, v), \lambda_2(u, v)$ が解となるような 2 次方程式の係数がテータの商に還元されることを観察できたわけである．

以上の結果は，一般の超楕円積分における結果に，容易に一般化できる．

参考文献

- [1] Leonhard Euler. *Introductio in analysin infinitorum*. 1748.
- [2] Leonhard Euler. *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum*. 1755. Eneström-Nummer E212.
- [3] Leonhard Euler. *Institutiones calculi integralis*. Vol. 1, , 1768. Eneström-Nummer E342.
- [4] Bernhard Riemann. *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*. 1851.
- [5] Bernhard Riemann. Theorie der Abel'schen Functionen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Vol. 54, pp. 115–155, 1857.
- [6] Carl Neumann. *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale*. 1865.
- [7] Giulio Carlo Fagnano. *Produzioni matematiche*. Nella Stamperia del Seminario, Pesaro, 1750.
- [8] Leonhard Euler. Observationes de comparatione arcuum curvarum irrectificabilium. *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, Vol. 6, pp. 58–84, 1761. Eneström-Nummer E252. Reprinted in *Opera Omnia*, Series 1, Volume 20, pp. 80–107.
- [9] Leonhard Euler. De integratione aequationis differentialis $\frac{(m+nx)dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{(m+ny)dy}{\sqrt{1-y^4}}$. *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, Vol. 6, pp. 37–57, 1761. Eneström-Nummer E251. Reprinted in *Opera Omnia*, Series 1, Volume 20, pp. 58–79.
- [10] Adrien-Marie Legendre. *Exercices de calcul intégral sur divers ordres de transcendentes et sur les quadratures*, Vol. 1. Veuve Courcier, Paris, 1811.
- [11] Adrien-Marie Legendre. *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes*, Vol. 1. Huzard-Courcier, Paris, 1825.
- [12] Niels Henrik Abel. Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Vol. 1, No. 1, pp. 65–84, 1826.
- [13] Niels Henrik Abel. Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendentes. *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, Vol. 7, pp. 176–264, 1841. Présenté à l'Académie le 30 octobre 1826.
- [14] Niels Henrik Abel. Recherches sur les fonctions elliptiques. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Vol. 2, No. 2, pp. 101–181, 1827.
- [15] Niels Henrik Abel. Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendentes. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Vol. 3, No. 4, pp. 313–323, 1828.
- [16] Carl Gustav Jacob Jacobi. *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*. Sumtibus Fratrum Bornträger, Regiomonti, 1829.
- [17] Carl Gustav Jacob Jacobi. Considerationes generales de transcendentibus Abelianis. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Vol. 9, pp. 394–403, 1832.

- [18] Carl Gustav Jacob Jacobi. De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium abelianarum innititur. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Vol. 13, pp. 55–78, 1835.
- [19] Carl Gustav Jacob Jacobi. Note sur les fonctions abéliennes. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Vol. 32, pp. 220–221, 1846.
- [20] Karl Weierstrass. Beiträge zur theorie der abel'schen integrale. *Beilage zum Jahresbericht über das königliche Gymnasium zu Braunsberg in dem Schuljahre 1848/49*, pp. 1–16, 1849.
- [21] Karl Weierstrass. Zur theorie der abel'schen functionen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Vol. 47, pp. 289–306, 1854.
- [22] Karl Weierstrass. Theorie der abel'schen functionen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Vol. 52, pp. 285–380, 1856.